UNIVERSIDADE DE LISBOA

O estudo das funções no 7.º ano: conceito e representações

Annabela Afonso Pelicano

Relatório de prática de ensino supervisionada

Mestrado em Ensino da Matemática

2014

UNIVERSIDADE DE LISBOA

O estudo das funções no 7.º ano: conceito e representações

Annabela Afonso Pelicano

Relatório de prática de ensino supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Oliveira e pela Professora Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino da Matemática

2014

Agradecimentos

À Professora Hélia Oliveira, pela sua inteira disponibilidade para o esclarecimento de dúvidas, pelo incentivo e por toda a atenção dada a este trabalho.

À Professora Suzana Nápoles, pelas suas preciosas sugestões e pela cordialidade e simpatia com que sempre me brindou.

À Filipa, por aceitar orientar-me e pelos valiosos conselhos dados ao longo desta etapa.

À Academia de Música de Santa Cecília, que me possibilitou a implementação desta investigação.

Aos alunos envolvidos neste estudo, pela colaboração, esforço e disponibilidade demonstrados. Destaco com especial carinho e agradecimento as alunas Laura e Carolina pelo cuidado constante que tiveram em se fazerem ouvir nas gravações.

À Cristina Teixeira e à Marta, pelo apoio, paciência e ajuda concedidos ao longo do mestrado.

À Tânia e à Sheila, pela disponibilidade com que me ajudaram nas formatações e por me terem acolhido tão bem na escola.

À Carla, pela paciência com que me ajudou também nas formatações.

À Márcia , pela ajuda com o inglês.

À Ana Teresa e à Joana, pela motivação e encorajamento prestados nas alturas de maior desânimo e por todas as provas de amizade que nunca esquecerei.

Aos meus tios, pelo afeto, compreensão e paciência constantes ao longo da elaboração deste trabalho.

Por fim, um agradecimento muito especial, a ti, Mãe, pelo teu amor incondicional e por me teres ensinado a amar.

Resumo

Neste relatório, apresento um estudo desenvolvido no âmbito da lecionação da unidade Funções, numa turma do 7.º ano. O estudo incide na forma como estes alunos compreendem a noção de função e as suas diferentes representações. Mais concretamente, procuro responder às questões: Como se caracteriza a noção de função evidenciada pelos alunos na unidade didática das Funções? Que flexibilidade demonstram os alunos na conversão de diferentes representações (verbal, gráfica, tabular e algébrica) de uma função?

O estudo segue uma abordagem qualitativa baseando-se na observação com registo áudio/vídeo, recolha documental das produções escritas dos alunos e realização de uma entrevista. Embora todos os alunos tenham sido participantes, a análise de dados baseou-se essencialmente em três pares de alunos.

A análise das produções escritas dos alunos permitiu-me concluir que estes demostraram inicialmente problemas na apreensão e na compreensão do conceito de função, nomeadamente na identificação das variáveis dependente e independente e, por vezes, confundindo o conceito de função com o de função injetiva. No entanto, a maioria dos alunos mostra ter superado as suas dificuldades ao longo da unidade, demonstrando compreender a noção de função independentemente da representação usada. Os alunos mostraram relativa facilidade na conversão de uma representação da função na representação tabular embora utilizem estratégias diferentes. Relativamente à conversão de uma representação na representação algébrica, mostraram bastantes dificuldades, estando os casos de sucesso associados à atribuição de significado às variáveis. No que concerne à conversão da representação de uma função na representação gráfica, os alunos não demonstraram grandes dificuldades embora os seus gráficos apresentem, com frequência, falta de rigor. A maioria recorreu à representação tabular como passo intermédio e de apoio na representação gráfica. De uma forma global, parece que o trabalho com sequências foi favorável à construção do conceito de função ainda que persistam algumas dificuldades que evidenciam a necessidade de mais tempo para trabalhar em torno deste conceito.

Palavras chave: Funções; Representações; Aprendizagem das funções; 7.º ano.

Abstract

In this report, I present a study carried out while teaching a curricular unit on Functions at St Cecilia’s Music Academy (*Academia de Música de Santa Cecília*) to Year 7 students. The objective of the study is to examine the way in which students understand functions and its different representations. In particular, I seek to address the following questions: How do we characterise the concept of function as revealed by the students in this unit on Functions? How flexible are the students at converting different representations (verbal, graphical, tabular, and algebraic) of a function?

This study adopts a qualitative research approach based on audio and video recording, written output from students and one interview. Although all students participated in this study, the data analysis focused mainly on three pairs of students.

The analysis of the student written output allowed me to conclude that some students experience initial difficulty in grasping and assimilating the concept of function, namely regarding the identification of dependent and independent variables and are, at times, unclear about the concept of function and the injective function. Nevertheless, the majority of the students surpassed their difficulties throughout the teaching of the unit, showcasing their understanding of the concept of function regardless of representation. The students revealed ease in converting a function representation in a tabular representation albeit relying on different strategies. Regarding the conversion of a representation in an algebraic representation, students showed significant difficulty, with success cases associated to the attribution of meaning to the variables. With respect to the conversion of a function representation in graphical representation, the students did not reveal significant difficulty, although their graphical representations frequently lacked rigour. The majority of students relied on tabular representation as an intermediate step towards graphical representation. Globally, the work conducted with sequences was favourable to the construction of the concept of function although some difficulties persist which highlight the need for additional time dedication in developing this concept.

Key words: Functions; Representation; Functions learning; Year 7.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

1. Introdução

Neste capítulo, exponho as razões de natureza pessoal e profissional que me motivaram na escolha deste tema, enuncio o problema e as questões de investigação e apresento a organização geral do estudo.

1.1. Motivação pessoal

A Matemática é invariavelmente uma das áreas onde há mais insucesso escolar. Mas porque suscita esta disciplina tanto medo entre os alunos? Várias razões são apontadas: desde metodologias ultrapassadas, inovações pouco consequentes, falta de empenho dos alunos ou mesmo a própria natureza da disciplina.

A Matemática é uma ciência abstrata, que não trata de coisas palpáveis, nem do mundo físico, social ou económico.

> A Matemática não é uma ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas das outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objetos e relações abstratas. É, para além disso, uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da ação que realizarmos (ME, 2007, p.2).

Mas, não será incontestável a necessidade que a Física, a Biologia ou a Economia têm da Matemática? A Matemática lida não só com problemas internos, como também com problemas que surgem noutras áreas cujas respostas promovem, por vezes, a "criação" de novos ramos da Matemática:

> A Matemática tem-se desenvolvido quer na resposta a solicitações internas e sobretudo pelo esforço na resolução de problemas que lhe são próprios, quer também, como muitos exemplos da sua história ilustram, na resposta a solicitações de outras ciências e aos problemas que elas colocam (ME, 2007, p.2).

Apesar da minha pouca experiência como professora, tenho constatado que certos alunos manifestam alguma estranheza no primeiro contacto com as funções. Com este trabalho pretendo tentar compreender onde estão estas dificuldades, o porquê da sua existência e equacionar alternativas à prática letiva que melhor se ajustem às necessidades dos alunos.

Consequentemente, este estudo é para mim uma oportunidade de analisar e refletir sobre as dificuldades sentidas pelos alunos e tentar fazer disso uma rotina no meu papel de professora.

1.2. Problemática e questões de estudo

O trabalho visa compreender como alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade compreendem a noção de função e as suas diferentes representações. Mais concretamente, pretendo responder às seguintes questões:

- Como se caracteriza a noção de função evidenciada pelos alunos na unidade didática das Funções?
- Que flexibilidade demonstram os alunos na conversão de uma representação de uma função (verbal, gráfica, tabular e algébrica) em outras?

O estudo foi desenvolvido, na unidade didática Funções, numa turma do 7.º ano da Academia de Música de Santa Cecília, ao longo de cinco aulas de noventa minutos que decorreram no 3.º período do ano letivo de 2010/2011. Note-se que tive a oportunidade de fazer este estudo numa turma onde era a professora responsável desde o início do ano letivo. Embora todos os alunos tenham sido participantes, optei pela constituição de três grupos de alunos que constituíram os estudos de casos.

Neste ano letivo estava a ser implementado pela primeira vez (excluindo as escolas piloto) o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Ao introduzir a unidade didática, optei por retomar o trabalho com sequências e regularidades, já iniciado nesse ano letivo e considerado fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica, contribuindo, assim, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, considerado uma das grandes prioridades curriculares do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007).

Tendo em conta o objetivo desta investigação e as orientações curriculares para este nível de escolaridade (ME, 2007) propus aos alunos predominantemente tarefas matemáticas que promovessem o estabelecimento de conexões entre sequências e funções, tarefas que envolvessem situações de proporcionalidade direta e tarefas que envolvessem a modelação de funções com situações contextualizadas, matemáticas e não matemáticas.

No que diz respeito ao método de trabalho, apostei no trabalho em pares culminando sempre com discussões em grande grupo, de modo a propiciar momentos de confronto e de partilha de ideias.

Com intuito de obter respostas às questões formuladas, usei diversos métodos de recolha de dados: a observação com registo áudio e vídeo, o recurso a produções escritas e a realização de uma entrevista final. Por último, analisei e interpretei os dados recolhidos, no sentido de dar resposta às questões formuladas.

1.3. Organização do relatório

Para além deste capítulo, onde apresento as minhas motivações pessoais, introduzo a problemática e a pertinência do estudo, o presente relatório consta de mais seis capítulos.

No segundo capítulo, apresento uma breve perspetiva histórica e elaboro uma síntese dos conceitos matemáticos fundamentais para a lecionação da unidade didática.

No terceiro capítulo, procedo ao enquadramento da problemática, abordando os temas nela considerados, tendo em conta alguma literatura de referência.

O quarto capítulo dedica-se à apresentação da unidade curricular trabalhada, à caraterização da escola e da turma e à descrição das aulas lecionadas, explicitando, nomeadamente, os planos, as estratégias, as tarefas e as sínteses das aulas.

No quinto capítulo, apresento as opções metodológicas, os critérios de escolha dos participantes, os instrumentos de recolha de dados usados (observação de aulas com registo áudio, produções escritas dos alunos, entrevista final aos três grupos selecionados e resultados quantitativos de um teste escrito) e o processo de análise desenvolvido.

O sexto capítulo é constituído pela análise dos dados tendo por base a problemática definida e as questões de estudo.

Finalmente, no sétimo capítulo, procuro responder às questões formuladas refletindo criticamente sobre o meu desempenho, procurando focar os aspetos positivos assim como as principais limitações sentidas.

2. O conceito de função

Neste capítulo, apresento umas breves notas sobre a evolução da Álgebra, e em particular, sobre a evolução do conceito de função. Além disso, faço uma síntese dos principais conceitos matemáticos utilizados no estudo realizado.

2.1. Perspetiva histórica

2.1.1. A álgebra ao longo dos tempos

A Álgebra é um ramo da Matemática cuja visão foi mudando ao longo dos tempos. Na Antiguidade, esta área começa por ser entendida como a formalização e a sistematização de técnicas de resolução de problemas usadas na altura. Posteriormente, com grande contribuição de Diofanto (a.C.200-aC.284), visto por muitos como o pai da Álgebra, começa a definir-se o conceito de equação e desenvolvem-se métodos de resolução de equações e sistemas de equações, que marcam uma mudança na perspetiva da Álgebra que passa a tratar fundamentalmente de questões deste tipo (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Porém, a expressão "Álgebra", que designa a operação de "transposição de termos", surge apenas alguns séculos mais tarde, com Al-Khwarizmi (790-840), matemático árabe, que se destaca ao elaborar um tratado sobre Álgebra, no qual sistematiza formas de resolução de equações do primeiro e segundo graus com coeficientes positivos. Como curiosidade, note-se que, na época, ***raiz*** e ***quadrado*** designavam, respetivamente, a incógnita e o quadrado da incógnita (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Mais tarde, no Ocidente, o matemático italiano Luca Pacioli (1445-1517) continua o trabalho iniciado por Al- Khwarizmi. Na sua obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni di Proporzionalità*, este matemático destaca as equações do 2.º grau, designando incógnita por ***cosa***, o quadrado da incógnita por ***censo*** e o termo constante por ***numero*** (Boyer, 1996; Costa & Rodrigues, 2010).

Nomes como, François Viète (1540-1603), Scipione del Ferro (1465-1526), Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576) e Ferrari (1522-1565) fazem grandes progressos na resolução de equações ultrapassando, pela primeira vez, os grandes marcos da Antiguidade e iniciando a Álgebra simbólica. Estabelece-se, nesta altura, a necessidade da introdução dos números complexos (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Simultaneamente em Portugal, o grande matemático Pedro Nunes (1502-1578) relaciona a Álgebra com os seus conhecimentos sobre náutica e cosmografia. Pedro Nunes deixa uma obra escrita em castelhano, em 1567, e traduzida para outras línguas, denominada *Libro de Álgebra en Arithmetica Y Geometria.* Nesta obra, são apresentadas técnicas e demonstrações para resolução de equações, de grande importância para os matemáticos que posteriormente desenvolveram a Álgebra simbólica. Note-se que, tal como os seus antecessores, Pedro Nunes também não aceitava nem as soluções negativas nem a solução nula, visto que as soluções das equações estavam sempre associadas a medidas (Costa & Rodrigues, 2010).

Ainda na teoria das equações, Albert Girard (1595-1632) é o primeiro matemático a formular o conhecido Teorema Fundamental da Álgebra, em *Invention nouvelle en l'Algèbre*. Contudo, a demonstração só é feita satisfatoriamente muito mais tarde, por Argand (1768-1822) e por Gauss (1777-1855). À medida que se desenvolve a teoria das equações algébricas, com grandes tributos a Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832), começa a desenvolver-se o conceito de função como correspondência entre os valores de duas variáveis. Primeiro são estudadas as funções polinomiais e racionais (funções algébricas) mas rapidamente, surgem funções mais complexas, as funções transcendentes (como as funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas,…) (Ponte, Branco & Matos, 2009).

A partir desta altura, a Álgebra sofre uma evolução profunda, encerrando um período que se pode designar por "Álgebra clássica". Os matemáticos centram-se, agora, no estudo de equações não algébricas. Outros, ainda, dedicam-se ao estudo de estruturas abstratas como grupos, anéis e corpos, a chamada "Álgebra moderna" (Ponte, Branco & Matos, 2009).

2.1.2. Evolução do conceito de função

O conceito de função teve origem na tentativa de filósofos, matemáticos, físicos e outros cientistas, de compreenderem a realidade e encontrarem métodos que permitissem descrever e estudar os fenómenos naturais. Deste modo, a noção de quantidade que depende do valor de outra quantidade independente, foi sendo desenvolvida ao longo dos séculos e resultou de um longo processo de aprofundamento matemático (Boyer, 1996).

Podem considerar-se três etapas principais no desenvolvimento da noção de função:

- A antiguidade: etapa durante a qual se estudam diferentes casos de dependência entre duas quantidades mas ainda não são rigorosas as noções gerais de quantidade variável e de função.
- A idade média: nesta etapa, estas noções são, pela primeira vez, e de maneira precisa, expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas durante a qual, como na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, e não por uma expressão analítica.
- O período moderno: etapa (a partir do fim do século XVI) durante a qual as expressões analíticas de funções começam a prevalecer; a classe das funções analíticas é expressa, geralmente, por uma série, tornando-se na classe principal utilizada. (Youschkevitch, 1981, in Oliveira, 1997, p.13)

Assim, é entre os babilónios (2000 a. C.) que se encontram os primeiros vestígios de "pensamento funcional" expressos em tabelas de correspondência de quadrados, raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas (Oliveira, 1997).

Mais tarde, na Grécia Antiga, filósofos e cientistas começam a procurar explicar o mundo que os rodeia, de maneira mais racional, desenvolvendo-se ciências como a Física e a Matemática. Deste modo, a ideia de função surge com os pitagóricos, no estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas. Posteriormente, no período Alexandrino, desenvolvem-se tabelas astronómicas que equivalem às funções racionais e às funções trigonométricas (Oliveira, 1997).

No entanto, mesmo com estes exemplos de dependências funcionais, “não havia nenhuma ideia geral de funcionalidade na Antiguidade” (Youschkevitch, 1981, in Oliveira, 1997, p.15). O conceito de função surge apenas quando se passa a descrever o movimento de forma quantitativa reafirmando, mais uma vez, o grande vínculo que une a Física e a Matemática.

Pensa-se que Nicolau de Oresme (~1323-1382) terá sido o primeiro a usar uma representação gráfica de funções, representando numa direção o tempo e na outra a velocidade de um móvel que se move com aceleração constante. Embora Oresme tenha usado os termos latitude e longitude, estes correspondem respetivamente à ordenada e à abcissa (Boyer, 1996).

No entanto, Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630) conferiram precisão matemática às ideias de Oresme, com os seus trabalhos sobre movimento dos planetas e queda de graves, respetivamente. O desenvolvimento dos conceitos de variável e função estão desta forma intrinsecamente ligados à modelação de fenómenos naturais (Boyer, 1996).

Para além de outras contribuições, Viète (1540-1603) é quem primeiro faz uma distinção clara entre parâmetros e variáveis, usando vogais para representar parâmetros e consoantes para representar variáveis (Boyer, 1996).

Não menos valiosos são os tributos de Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650), que introduziram o método analítico de definir funções, tornando o pensamento funcional essencial na criatividade dos matemáticos (Albuquerque et al., 1998).

A palavra “função” só foi introduzida por Leibniz (1646-1716) apesar de ser Bernoulli (1694-1698) quem apresenta a primeira definição explícita: “Chamamos aqui função de uma magnitude variável à quantidade que é composta de qualquer modo possível desta variável e de constantes” (Albuquerque, Antunes, Nápoles, Precatado & Teixeira, 1998).

Euler (1707-1783) foi também uma figura essencial para o desenvolvimento do conceito de função, distinguindo variáveis de constantes, funções contínuas de funções descontínuas e foi o primeiro a adotar a notação $f(x)$ para designar o valor da função num ponto (Boyer, 1996).

No século XIX, diversos matemáticos como Condorcet (1743-1794), Cauchy (1789-1857), Lacroix (1765-1843), Fourier (1768-1830) e Lobachevsky (1792-1856) estudaram e aprofundaram o conceito de função (Boyer, 1996).

Mas só com Dirichlet (1805-1859) é que o conceito de função foi definido tal como atualmente, isto é, como uma correspondência unívoca entre os valores de duas variáveis:

> Uma função **f : A→ B** consiste em dois conjuntos, o domínio **A**, o conjunto de chegada **B**, e uma regra que associa a cada elemento **x** de **A** (objeto) um só elemento **y** de **B** (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em **A** com valores em **B**. Chama-se contradomínio de **f** ao subconjunto de **B** formado pelas imagens. (Albuquerque et al., 1998, p. 13)

2.2. Conceitos matemáticos

2.2.1. Definição de função

Dados dois conjuntos, *D* e *C*, chama-se **função** definida em D com valores em C a uma correspondência entre os dois conjuntos que a cada elemento de D, faz corresponder um e um só elemento de *C*. O conjunto D é chamado o **domínio** da função e o conjunto C o **conjunto de chegada**. Designa-se por **objeto** ou **variável independente** um elemento genérico do domínio D da função. Ao conjunto de todas as imagens dá-se o nome de **contradomínio da função** e representa-se por *CD* ou *D'*. Este conjunto é um subconjunto do conjunto de chegada. Designa-se por **imagem** ou **variável dependente** um elemento genérico do contradomínio da função. Designam-se por **funções reais de variável real** as funções cujo domínio e conjunto de chegada são subconjuntos do conjunto dos números reais.

Se a função se chamar f, pode escrever-se $f : D \to C$ e pode ler-se “f é uma função de D em C”.

Usualmente, a variável independente é representada por x e a variável dependente é representada por y. Se a função se chamar f, pode escrever-se $y = f(x)$, com domínio D, para indicar abreviadamente que estamos em presença de uma função $f : D \to C$ que a cada $x \in D$ associa $y = f(x)$. É mesmo frequente usar a expressão ainda mais abreviada “função $f(x)$, com domínio D” ou mesmo apenas “função $f(x)$”. No caso desta última expressão subentende-se que o seu domínio é o maior conjunto de valores para os quais para os quais ela tem sentido.

2.2.2. Representação de uma função

Há diferentes formas de representar uma função:

i) verbalmente, através de enunciados verbais;

ii) graficamente, usando diagramas sagitais ou gráficos cartesianos;

iii) tabularmente, com recurso a tabelas;

iv) algebricamente, utilizando expressões analíticas.

Todas estas representações têm as suas vantagens e limitações mas acima de tudo, complementam-se pois nenhuma *per si* pode transmitir toda a informação referente ao objeto matemático função.

Nos diagramas sagitais, é bastante explícita a correspondência entre um elemento do domínio e um elemento do conjunto de chegada. Esta representação é particularmente útil para exemplificar casos de correspondências que são e não são funções. Contudo, só pode ser usada quando o domínio e o conjunto de chegada têm um número reduzido de elementos.

As tabelas, também elas usadas apenas quando o domínio e o conjunto de chegada têm um número limitado de elementos, são de fácil consulta. Consegue observar-se, de imediato, qual a imagem de determinado objeto e qual o objeto a que corresponde determinada imagem, desde que estejam representados na tabela. Caso contrário, teremos que analisar cuidadosamente a relação existente entre variável independente e dependente.

A expressão algébrica ou analítica de uma função é uma expressão que traduz a regra que associa os objetos às respetivas imagens. Note-se que a mesma expressão algébrica pode representar funções diferentes, consoante o domínio. Desta forma, é fundamental indicar sempre o domínio de uma função quando a representamos por uma expressão algébrica. Duas funções só são iguais quando apresentam expressões analíticas equivalentes e o mesmo domínio. Embora não seja possível observar a imagem de determinado objeto por mera inspeção, conseguimos fazê-lo com um simples cálculo.

Os gráficos são particularmente importantes pois, além do apelo visual, favorecem a observação de determinados comportamentos que com outras representações são mais difíceis de perceber. Para representar graficamente uma função real de variável real há primeiro que fixar um referencial. Tradicionalmente, usa-se um referencial cartesiano, isto é, formado por dois eixos (um eixo horizontal e um eixo vertical), designados respetivamente por **eixo das abcissas** (eixo dos xx) e por **eixo das ordenadas** (eixo dos yy) que se intersectam perpendicularmente num ponto O (origem do referencial).

Num referencial cartesiano, qualquer ponto A é localizado por um par de **coordenadas** (cartesianas):

- a **abcissa**, que se lê no eixo das abcissas (eixo horizontal);
- a **ordenada**, que se lê no eixo das ordenadas (eixo vertical).

E escreve-se $A(x_A, y_A)$, onde x_A é a abcissa e y_A é a ordenada.

O **gráfico** de uma função $f: D \subseteq \Re \to \Re$ num referencial cartesiano é o conjunto de todos os pontos do plano correspondentes a pares $(x, f(x))$, com $x \in D$.

A representação verbal é essencial a uma boa interpretação do problema e à atribuição de significado às variáveis. Contudo, não é uma linguagem universal e pode depender do estilo pessoal. (Friedlander & Tabach, 2001)

2.2.3. Funções lineares

No 7.º ano de escolaridade, estuda-se apenas um determinado tipo de funções, as funções lineares, que representam funções de proporcionalidade direta.

Dadas duas variáveis x e y, diz-se que y é **diretamente proporcional** a x, se $y = kx$ com k uma constante não nula, denominada **constante de proporcionalidade**. Assim, o quociente entre dois quaisquer valores não nulos correspondentes de y e x é constante (igual à constante de proporcionalidade) e $y = 0$ quando $x = 0$.

Uma função **linear**, isto é, uma função definida em $\Re$ por uma expressão algébrica do tipo $y = kx, k \neq 0,$ traduz uma situação de proporcionalidade direta entre as variáveis x e y, em que k é a constante de proporcionalidade. Mais precisamente, a variável y é diretamente proporcional à variável x, sendo k a constante de proporcionalidade. Assim, nos gráficos que traduzem uma relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis em que k é a constante de proporcionalidade os pontos têm de estar sobre uma reta que passa na origem e tem declive igual a k.

3. Enquadramento da problemática e orientações curriculares

Neste capítulo, analiso a importância do conceito de função e das representações matemáticas no ensino e aprendizagem da matemática. Revejo ainda os problemas mais comuns relativos à aprendizagem das funções e as vantagens, apontadas na literatura, para o estudo de relações funcionais com base no trabalho com padrões.

3.1. A importância do conceito de função e as orientações curriculares para o seu estudo

Ora, à medida que a Álgebra se foi enriquecendo, tornou-se cada vez mais redutor centrar o seu estudo apenas no trabalho com expressões e equações. Esta visão desvaloriza aspetos importantes como a resolução de problemas, o estudo de funções, relações e estruturas algébricas. Se é certo que não podemos menosprezar a importância dos símbolos, não podemos também reduzir a Álgebra à manipulação de símbolos e de expressões algébricas. O uso de simbologia sem significado conduz a que, muitas vezes, esta área seja regida pela repetição de exercícios onde apenas se pratica a manipulação algébrica (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Assim sendo, começou a dar-se importância ao desenvolvimento do "pensamento algébrico", que compreende a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, relações, estruturas matemáticas e usá-los na interpretação e resolução de problemas:

> … o grande objetivo do ensino da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. No propósito principal de ensino, o programa associa este pensamento à capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar esses conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações contextualizadas. (GTI, 2010, p. 26)

Uma das ideias fundamentais do pensamento algébrico é pois desenvolver o "sentido de símbolo" privilegiando, assim, as relações entre os objetos e não apenas a capacidade de manipulação de símbolos. Consequentemente, dá-se, hoje em dia, um grande destaque ao conceito de função (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Deste modo, o conceito de função tem sido cada vez mais valorizado, sendo mesmo considerado na literatura (Carraher & Schliemann, 2007; Chazan & Yerushalmy, 2003; Ponte, Branco & Matos, 2009) como um dos mais importantes na Matemática. Muita dessa importância deve-se ao seu papel unificador: as funções tornaram-se num instrumento fundamental não só na Matemática como também na engenharia, na tecnologia, nas ciências naturais, humanas e sociais, nomeadamente, na descrição de fenómenos e no estabelecimento de previsões. Refletindo sobre a Matemática escolar, diversos autores (Carraher & Schliemann, 2007; Chazan & Yerushalmy, 2003; Ponte, Branco & Matos, 2009) têm valorizado o conceito de função, sugerindo-o como ponto de partida para o estudo da Álgebra.

Chazan e Yerushalmy (2003) referem a utilidade que uma abordagem da Álgebra baseada nas funções tem para uma aprendizagem com compreensão, em particular no estudo de equações, sistemas de equações, inequações e outras relações entre variáveis.

Carraher e Schliemann (2007) destacam também a importância do estudo das relações funcionais para o desenvolvimento do raciocínio algébrico desde níveis elementares. Se bem que o estudo das funções só faça formalmente parte dos currículos escolares a partir do 3.º ciclo, é bem mais cedo que os alunos começam a ter contacto com relações funcionais, como por exemplo, no trabalho com sequências ou mesmo nas operações aritméticas quando os alunos podem aperceber-se que a um par de números corresponde um único número por meio de uma operação.

Seguindo a mesma linha de raciocínio no Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007), o pensamento algébrico começa a ser desenvolvido logo no primeiro ciclo, recorrendo ao trabalho com sequências e regularidades: "o trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 14). Sendo as sequências funções cujo domínio se restringe ao conjunto dos números naturais, os alunos trabalham desde cedo, mesmo que de forma implícita, com a associação de uma ordem a um determinado termo.

Nas orientações para o 2.º ciclo, valoriza-se a importância de trabalhar aspetos que sirvam de base para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Sugere-se que deve dar-se continuidade à investigação de regularidades, trabalhar-se com a generalização das propriedades das operações aritméticas e com a representação de relações de forma simbólica, no sentido de desenvolver a noção de variável. É também no 2.º ciclo, que os alunos se familiarizam com fórmulas relativas a áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, onde manipulam expressões com "letras" (Ponte, Branco & Matos, 2009). Estuda-se ainda o conceito de proporcionalidade direta. No entanto, a abordagem deste conceito é feita apenas através do uso de tabelas ou de gráficos para resolução de problemas que exploram situações deste tipo, não se falando da noção de função (ME, 2007).

Como já referi, no Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007), o conceito de função só é introduzido formalmente no terceiro ciclo:

> Neste ciclo retoma-se a investigação de sequências e regularidades, já realizada nos ciclos anteriores, com vista a aprofundar o estudo de relações algébricas e sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica. (p. 55)

É a partir deste trabalho em particular que se desenvolve a noção de variável. Neste ciclo, aprofunda-se também o estudo da proporcionalidade direta vista agora como função. Nesta altura, o conceito de função deve ser visto como relação entre variáveis e também como correspondência unívoca entre dois conjuntos:

> O conceito de função apresenta diversas facetas e pode ser encarado de diferentes modos. De acordo com a definição, trata-se de uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, mas uma função é, geralmente, encarada numa situação concreta como uma relação entre variáveis (…). Tanto nas situações da vida corrente como nos problemas de outras ciências, quando se diz que uma coisa é função de outra está-se a evidenciar uma relação de dependência, isto é, que a primeira varia à medida que a segunda também varia. (Abrantes, Serrazina & Oliveira, pp. 103 e 104)

Ao caraterizar este conceito como correspondência, é indispensável que os alunos compreendam que necessitam de dois conjuntos (domínio e conjunto de chegada) e uma "regra de formação" que lhes permita obter um elemento do segundo conjunto a partir de um elemento do primeiro. Além disso, pretende-se que sejam também capazes de associar o conceito de função às ideias de variação e de mudança (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Os alunos devem trabalhar com os diferentes tipos de representação (tabular, gráfica, algébrica): "Estes modos de representação podem ser usados em conjunto, sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 117). As representações mais relevantes do conceito de função são as tabelas, os gráficos cartesianos e as expressões algébricas. Os diagramas sagitais são também úteis para exemplificar exemplos de correspondências que são ou não funções, embora só possam ser utilizados nos casos em que o domínio e o conjunto chegada têm um número reduzido de elementos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Observe-se que, segundo estes autores, o estudo da noção de função visa, fundamentalmente, uma compreensão útil/efetiva deste conceito que privilegie a resolução de problemas e a modelação de situações de contexto real, privilegiando as tarefas de cunho exploratório ou investigativo, quer em contexto matemático quer em contexto real.

Um dos aspetos centrais no conceito de função é a noção de variação bastante presente no quotidiano. Kaput (1999) refere mesmo que o conceito de função tem as suas raízes mais profundas nas ideias de "causalidade", "crescimento" e "variação": "as duas ideias de correspondência e variação de quantidades que estão na base do conceito de função atravessam e unificam diversos tipos de experiências matemáticas comuns“ (p. 19). Este autor aconselha trabalhar com a noção de variação desde cedo, utilizando quantidades conhecidas que mudam ao longo do tempo, como por exemplo, a altura de plantas ou a temperatura. Nas normas do NCTM (2008) também se destaca o interesse do conceito de função, como relação entre quantidades, salientando a análise da variação: "a compreensão da variação é essencial à compreensão das funções e à compreensão de muitas ideias transmitidas nas notícias" (p.42).

O Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) reconhece a importância "de estudar situações de variação em contextos significativos" (p.7) e da capacidade de ler e interpretar gráficos, devendo os alunos trabalhar com exemplos que apresentem diferentes tipos de variação: estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou constantes e com variação constantes e não constantes. Além disso, os alunos devem também ser capazes de interpretar gráficos construídos a partir de variáveis discretas ou variáveis contínuas (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Como consequência, é fundamental que os alunos contactem desde cedo com casos de taxa de variação constante, de que são exemplo todas as funções afins, como também situações de variação não constante: "Se as noções de variação forem privilegiadas logo desde os primeiros anos de escolaridade, talvez os alunos se iniciem no cálculo com bases mais sólidas que possibilitem a compreensão dos conceitos a esse nível" (NCTM, 2008, p. 42). Note-se que uma das dificuldades dos alunos é partir do princípio que todas as variações são constantes (Ponte (1992)).

3.2. Representações

3.2.1. As representações no ensino da Matemática

É impossível falar no conceito de função sem falar nas suas representações. A noção de representação subentende que existe algo que substitui algo. São vários os autores (Duval, 2004; Eisner, 1997; Tripathi, 2008) que se debruçam sobre o papel das representações na aprendizagem.

Segundo Tripathi (2008), uma representação é uma construção mental ou física que nos permite descrever e interpretar um determinado conceito, além de nos permitir comunicar com os outros. Para esta autora, olhar um conceito sob vários ângulos permite-nos encará-lo de perspetivas diferentes e tornar a sua compreensão mais rica e profunda: "Na maioria das vezes, uma representação matemática realça apenas um aspeto desse conceito. Restringindo-nos a uma única representação é como lidar com o conceito de olhos vendados" (p. 438).

Deste modo, Tripathy (2008) defende o uso de diferentes representações e destaca a importância de os alunos desenvolverem destreza para se moverem entre elas. Além disso, a autora encara as representações como meios de resolução de problemas, privilegiando as representações visuais. Estas permitem estabelecer uma ligação entre os materiais concretos usados para a apreensão dos conceitos e as formas verbais ou simbólicas usadas posteriormente. Os professores devem, por isso, incentivar os seus alunos a fazer uso de representações visuais.

Eisner (1997) refere que o conhecimento se deve não só às aquisições mentais individuais mas também, às formas de representação disponíveis na cultura onde estamos inseridos. Desta forma, é imprescindível que a escola proporcione aos alunos diferentes formas de representação. Para este autor, há cinco pontos fundamentais na relação entre representações e produção de conhecimento:

i) As formas de representação que usamos no pensamento humano influenciam o processo e também o produto desse pensamento.

ii) Cada representação tem as suas características próprias e limitações, levando ao desenvolvimento de ferramentas cognitivas diferentes.

iii) A escolha da representação influencia não só aquilo que se consegue representar como também aquilo a que se consegue aceder.

iv) Formas de representação podem ser combinadas para enriquecer o conhecimento.

v) Cada representação pode ser utilizada de formas diferentes, acarretando cada uma raciocínios diferentes.

Segundo Duval (1999, 2004, 2006), é impossível compreender como se desenvolve o conhecimento sem passar pela noção de representação. Os objetos matemáticos são abstratos e não são diretamente acessíveis à perceção mesmo com ajuda de instrumentos (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, entre outros), necessitando-se, assim, para a sua apreensão, do uso de representações. Este autor define as representações mentais como um conjunto de imagens e conceitos que um indivíduo pode ter sobre um objeto ou sobre uma situação:

> as representações podem ser crenças ou conceções pessoais às quais se tem acesso através de produções verbais ou esquemas individuais. (…) Podem também ser signos ou as suas associações complexas produzidas de acordo com regras e que nos permitem a descrição de um sistema, um processo ou um conjunto de fenómenos. (2006, p.104)

Ora, para conseguirmos exteriorizar as nossas representações mentais recorremos às representações semióticas que merecem um lugar de destaque na formação do pensamento matemático. Estas representações englobam sistemas particulares de símbolos, tais como tabelas, linguagem verbal, gráficos e expressões algébricas, de que os indivíduos dispõem de forma a tornar as representações mentais acessíveis aos outros. As representações semióticas, além de gozarem de uma função de relevo na comunicação são também essenciais para construir conhecimento.

Duval destaca três atividades cognitivas indispensáveis na apreensão ou produção de uma representação: a formação de uma representação num registo semiótico particular, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação num determinado registo semiótico implica sempre uma seleção do conjunto de caracteres que constituem o que queremos representar.

O tratamento é inerente a um sistema de representação e consiste em "passar" de uma representação para outra no mesmo registo, como por exemplo, escrever duas expressões algébricas equivalentes da mesma função. No tratamento, trabalhamos dentro do mesmo sistema de registo semiótico mobilizando, assim, apenas um registo de representação.

A conversão é a "passagem" de uma representação pertencente a um determinado tipo de registo para outra, como por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica. Aqui, trabalhamos com regras de formação e tratamento distintos mas o objeto é conservado. Todavia, embora o objeto seja preservado diferentes aspetos são observados em cada uma das representações. O mesmo objeto matemático pode ter representações diferentes consoante a sua utilidade e cada representação transmite informações específicas, com utilidades distintas, mas nenhuma delas pode descrevê-lo completamente. Assim, para Duval, a compreensão do conceito só é possível quando se alcança a coordenação das várias representações:

> As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a consequência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado. (Duval, 1999, in Moretti, 2002, p. 347)

Ora, é na conversão que os alunos apresentam maiores dificuldades. Na conversão, é fundamental que se entenda a diferença entre a representação e o objeto representado. Problemas na conversão de uma representação têm como consequência a confusão entre o objeto representado e a sua representação bem como a identificação de duas representações do mesmo objeto como dois objetos diferentes. Assim, para aquisição de conhecimento, é preciso ser capaz de transitar pelas várias representações do mesmo objeto, isto é, estabelecer uma coordenação entre os diferentes registos de representação semiótica (Duval, 1999, 2004, 2006).

Consequentemente, a Matemática é caracterizada pela dependência das representações semióticas, bem como pela grande variedade dessas representações e pela coordenação entre elas. É essa coordenação que conduz à compreensão e à distinção entre objeto matemático e as respetivas representações, mas a grande maioria dos alunos sente dificuldade na coordenação das múltiplas representações (Candeias, 2010). Muitos alunos mostram-se incapazes de compreender que as várias formas de representar um determinado objeto matemático estão no lugar desse mesmo objeto que não está espontaneamente acessível. É de salientar também que saber realizar a conversão num determinado sentido não implica necessariamente que se saiba fazê-la no sentido oposto.

Friedlander e Tabach (2001) defendem que o uso de várias representações permite ultrapassar as limitações de cada uma delas, proporcionando uma aprendizagem mais significativa e efetiva. Estes autores referem algumas vantagens para cada tipo de representação:

- Verbal – evidencia a conexão entre a Matemática, outras ciências e a vida quotidiana.
- Numérica – percussora da linguagem algébrica é muito importante na compreensão inicial de um problema e na busca de casos particulares.
- Gráfica – marcadamente visual torna-se muito apelativa e intuitiva.
- Algébrica – permite a generalização e é efetiva na apresentação de regularidades e modelos matemáticos.

Porém, referem também algumas das suas limitações:

- Verbal – não é universal, podendo tornar-se um obstáculo na comunicação matemática pois depende do sujeito.
- Numérica – não permite generalizações funcionando apenas para casos com número reduzido de elementos.
- Gráfica – muito influenciada por fatores externos como a escala e a precisão, apresentando, por isso, pouco rigor. É frequente só ser visível parte do domínio.
- Algébrica – a utilização exclusiva de símbolos algébricos pode condicionar o sentido matemático ou a natureza dos objetos representados e dificultar a interpretação dos resultados.

Segundo estes autores, deve trabalhar-se com várias representações mal se inicie o estudo da Álgebra. Tendo em conta a importância que as tarefas têm no processo de ensino aprendizagem dos alunos, Friedlander e Tabach (2001) sugerem que os professores devem promover nas suas aulas: i) tarefas em que as situações matemáticas sejam apresentadas através de diferentes representações de modo a encorajar a versatilidade na escolha da representação; ii) tarefas de natureza investigativa para que os alunos se possam familiarizar com a representação inicial, consigam estabelecer relações com outras representações e saibam escolher a mais apropriada e iii) tarefas que promovam a reflexão sobre as escolhas feitas.

O uso de diferentes representações é, deste modo, uma ideia presente entre vários autores. Diferentes representações de um objeto salientam diferentes aspetos da sua estrutura e permitem-nos ultrapassar as limitações de cada uma delas. É a única maneira de se ter acesso ao objeto na sua totalidade, conferindo significado à aprendizagem. Além disso, as representações devem ser vistas como instrumentos de resolução de problemas, pois permitem organizar o trabalho e conduzir ideias tendo uma forte componente comunicativa.

3.2.2. As representações nas orientações curriculares

No Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) é explícito o papel desempenhado pelas representações ao longo da aprendizagem escolar. Neste documento, destaca-se a importância da utilização de diferentes representações, da capacidade de transitar entre elas e da escolha da representação mais adequada. O programa enfatiza também a vantagem da criação de representações pessoais em todos os ciclos de ensino. Além disso, é também contemplada a importante função que as representações têm na comunicação.

Nas normas do NCTM (2008), as representações são vistas como cruciais na compreensão e na comunicação de ideias matemáticas. Pretende-se não só que os alunos compreendam os diferentes tipos de representações mas que consigam transitar entre eles. Os alunos devem também ser capazes de refletir no seu uso, nas suas vantagens e limitações desenvolvendo, assim, um conhecimento mais aprofundado das funções:

> … os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e desvantagens de cada forma de representação, consoante os objetivos em causa. À medida que trabalham com representações múltiplas de funções,

> incluindo numéricas, gráficas e simbólicas, irão desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções. (p. 40)

Neste documento, a aprendizagem das representações convencionais desempenha um papel importante tal como o recurso às representações pessoais, por serem fundamentais na compreensão e na resolução de problemas.

Assim, é indispensável promover nos alunos a capacidade de entender as funções como um todo. Isto é, transitar entre representações, saber escolher qual a representação mais apropriada, avaliando as vantagens e limitações de cada uma delas. Para isso, e tendo em conta, que o interesse dos nossos alunos é em muito estimulado pelo tipo de tarefas que lhes propomos, é fundamental selecionar tarefas que contemplem a relação entre os vários tipos de representação de funções para que possam estabelecer conexões entre elas.

3.3. Proporcionalidade direta

O estudo da proporcionalidade direta é encarado como fundamental e estruturante no ensino da Matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Lesh, Post & Behr, 1988; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004).

Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), o conceito de proporcionalidade é fundamental no desenvolvimento da capacidade de lidar com diversas situações do mundo real, na apreensão de conhecimentos de várias áreas do saber e no desenvolvimento cognitivo do aluno: "A capacidade de utilizar o raciocínio proporcional corresponde a uma fase importante do desenvolvimento cognitivo, por ser um ponto culminante das aprendizagens da matemática no ensino elementar e uma base fundamental para o estudo da matemática no ensino secundário" (p. 55).

A importância do raciocínio proporcional é salientada por Lesh, Post e Behr (1988), que também o consideram, por um lado, como o culminar da matemática elementar e, por outro lado, como o alicerce da matemática avançada, caracterizando-o como o raciocínio sobre as relações holísticas entre duas expressões racionais. Estes autores encaram o raciocínio proporcional como uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariação e possibilita múltiplas comparações, requerendo a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação, relacionados com inferência e predição, envolvendo pensamento qualitativo e quantitativo. Piaget e Inhelder (1975, citados por Lesh, Post & Behr, 1988) referem que a característica fundamental do raciocínio proporcional envolve uma relação entre duas relações, ou seja, uma relação de segunda ordem e não apenas uma relação entre dois objetos.

Van Dooren et al. (2004) afirmam que as relações proporcionais têm grande aplicabilidade em situações do quotidiano bem como em problemas de matemática e de ciências.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007), o desenvolvimento do raciocínio proporcional deve iniciar-se no 1.º ciclo na exploração, por exemplo, de sequências e tabelas. No 2.º ciclo, este trabalho é aprofundado com o estudo da proporcionalidade direta, da razão e da proporção. Perante uma determinada situação contextualizada, os alunos devem ser capazes de reconhecer se se trata de uma situação de proporcionalidade direta: "Os alunos devem usar a proporcionalidade direta para fazer previsões e distinguir a relação de proporcionalidade direta de outros tipos de relações" (p. 40). Os alunos deverão também ser capazes de resolver problemas que envolvem relações funcionais, nomeadamente, problemas de valor omisso e de comparação.

Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), os alunos devem desenvolver ao longo do ensino básico, a capacidade de averiguar que tipo de relação numérica se aplica (proporcionalidade direta, proporcionalidade inversa, raciocínio aditivo ou outra). Estes autores referem que deve promover-se o trabalho com situações de natureza numérica ou geométrica onde está patente o raciocínio proporcional, como por exemplo, a semelhança de figuras e as escalas. No 3.º ciclo, os alunos devem contactar com funções e gráficos de situações contextualizadas representativas de proporcionalidade direta. Além da representação tabular, já presente no 2.º ciclo, os alunos lidam nesse ciclo com as representações algébrica e gráfica: "Os alunos devem saber reconhecer uma relação de proporcionalidade direta em situações dadas em linguagem natural, através de tabelas de valores, através de gráficos ou através de expressões algébricas da função" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 131).

No entanto, de acordo com Lesh, Post e Behr (1988), saber resolver um problema sobre proporções não significa necessariamente ter desenvolvido o raciocínio proporcional. De facto, muitos destes problemas podem ser resolvidos observando relações numéricas simples ou usando o produto cruzado. A investigação mostra que este método é mal compreendido e "é frequentemente usado pelos alunos mais para evitar o raciocínio proporcional do que para o facilitar" (p. 2).

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem também que os alunos não devem usar estratégias de cálculo (como o algoritmo do produto cruzado) sem compreenderem as situações de proporcionalidade direta e sem terem tido a oportunidade de explorar e usar estratégias informais para resolver problemas sobre proporcionalidade. Para estes autores, a variedade de processos usados, tal como, redução à unidade, equivalência de frações ou equações "constituem uma fonte de dificuldades concetuais" (p.51), salientando ainda que, numa fase inicial, os alunos utilizam preferencialmente métodos aditivos e regularidades entre os números em detrimento de métodos multiplicativos.

A par disto, uma outra dificuldade é constatada com frequência. Grande parte dos alunos aplica modelos lineares em qualquer contexto: "Na verdade, com muita frequência, os alunos usam estratégias que assumem existir proporcionalidade direta em situações em que tal relação não existe" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p.124). Para Van Dooren et al. (2004), este facto tem essencialmente duas razões: a simplicidade das funções lineares e os conhecimentos prévios dos alunos. As funções lineares são as funções com as quais contactamos primeiro e são as mais fáceis de tratar. Rouche (1989, citado por Van Dooren et al., 2004) refere que "A ideia de proporcionalidade é a primeira a surgir pois não há dúvida que não há funções mais simples que as lineares" (p. 486). Van Dooren et al. (2004) destacam que os alunos não são "recipientes vazios" e possuem conhecimentos baseados no senso comum. Ora, por vezes, estes conhecimentos prévios entram em confronto com os novos conhecimentos e/ou são incompatíveis com eles. Tal como Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), estes investigadores salientam a importância de incorporar essas experiências do dia-a-dia com os conhecimentos mais recentes. Por outras palavras, devemos compreender os métodos espontâneos dos alunos e torná-los num ponto de partida numa nova situação.

3.4. Aprendizagem das funções

3.4.1. Dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções

De um modo geral, os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem das funções. E não falamos apenas de estudantes do terceiro ciclo ou do ensino secundário. Alguns estudos (Hitt, 1998; Ponte, 1984) mostram que alunos universitários e mesmo futuros professores de Matemática manifestam também problemas nesta área. Apresento, de seguida, um quadro, onde destaco as principais dificuldades sentidas nesta área, de acordo com diversos autores (Candeias, 2010; Domingos, 1994; Hitt, 1998; Matos, 2008; Sajka, 2003; Sfard, 1991).

Resolvi agrupar os problemas sentidos em uma de duas secções – noção de função e representações – seja claro que não existe nenhuma linha que separe estas "secções".

Quadro 1 - Dificuldades dos alunos relativas à noção de função e às representações

	Dificuldades:	**Referências:**
Noção de função	• Dificuldades em calcular o objeto de uma determinada imagem e vice-versa. • Dificuldades na perceção das variáveis dependente e independente. • Confusão entre o conceito de função e o conceito de função injetiva. • Dificuldades na identificação da variável envolvida.	Domingos (1994)
	• Tratamento da expressão algébrica de uma função como sendo uma equação. • Confusão de notação: $f(x)$ pode significar duas coisas distintas – o valor da imagem do objeto x e a própria função.	Sajka (2003)

Representações	• Identificação da função com uma das suas representações. • Dificuldades em mudar de representação. • Predominância do uso de determinada representação.	Candeias (2010) Hitt (1998) Sfard (1991)

3.4.2. A aprendizagem das funções a partir de padrões

O que fazer então para que os alunos possam ultrapassar estas dificuldades? Não há, certamente, uma fórmula mágica que permita que todos os alunos se apropriem do conceito de função. Contudo, são apontadas na literatura (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Carraher & Schliemann, 2007; Driscoll, 1999; Matos, 2007; NCTM, 2008; Oliveira, 2009) algumas estratégias consideradas adequadas para um bom entendimento da noção de função, resultado de numerosos estudos de casos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Carraher & Schliemann, 2007; Driscoll, 1999; Matos, 2007; NCTM, 2008; Oliveira, 2009).

Deste modo, a exploração de padrões é apontada, por diversos autores (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Carraher & Schliemann, 2007; Driscoll, 1999; Matos, 2007; NCTM, 2008; Oliveira, 2009) como um meio favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular, para se introduzir o conceito de função.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que o trabalho com padrões ajuda a desenvolver a ideia de relação funcional e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, a exploração de sequências permite "desenvolver o raciocínio e estabelecer conexões entre as diversas áreas da Matemática" (p. 49). Nesse sentido, aconselha-se que esse trabalho seja promovido logo nos primeiros anos de escolaridade: " A exploração das sequências numéricas, trabalhadas desde os primeiros anos, vai sendo ampliada, constituindo uma introdução à ideia de variável quando os alunos usam letras ou outros símbolos na descrição das relações" (p. 49).

Indicações semelhantes estão referenciadas no Programa de Matemática para o Ensino Básico (2007) onde se reforça a ideia de que no 3.º ciclo se deve retomar o trabalho com sequências e regularidades "com vista a aprofundar o estudo de relações algébricas e sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica" (p. 55). Além disso, é explícito que no primeiro ciclo, "o trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 14), salientando, assim, a importância de começar cedo a exploração de padrões.

Oliveira (2009) destaca a importância que a capacidade de generalização apresenta no Programa de Matemática para o Ensino Básico (2007), dando relevo ao trabalho com sequências e regularidades. Esta autora considera que a exploração de padrões é central à aquisição da noção de variável e "constitui também um alicerce importante para o desenvolvimento do pensamento funcional e constitui um contexto adequado para dar sentido à equivalência de expressões algébricas bem como à simplificação das mesmas" (p. 85).

As normas do NCTM (2008) consideram que a exploração de padrões facilita a compreensão do conceito de função, proporcionando uma base para um trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas. Deste modo, a realização de tarefas que envolvam o estudo de padrões ajuda os alunos a perceber a "verdadeira" noção de variável que, para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido. Por outro lado, destaca-se também a utilidade de identificar funções que modelem situações de contextos diversificados e salienta-se a importância de trabalhar com padrões desde tenra idade.

Carraher e Schliemann (2007) referem o estudo de Moss, em 2006, onde investigadores introduzem a noção de função com base na exploração de padrões pictóricos, em que a cada posição ordinal de uma figura (variável independente) faz-se corresponder o número de elementos de cada figura (variável dependente).

Driscoll (1999) partilha da ideia que o trabalho com padrões pode preparar a aprendizagem das relações funcionais constituindo uma base para a construção do conceito de função e promovendo ainda o desenvolvimento de raciocínios nas áreas da aritmética e ou da geometria. Para este autor, o raciocínio que está por detrás da procura de padrões é a capacidade de generalização, essencial a toda a Matemática.

Driscoll (1999) identifica vários erros que os alunos tendem a fazer quando trabalham com sequências e regularidades. São exemplos: encontrar uma fórmula que funcione para os primeiros casos e não verificar os restantes ou partir do princípio que todas as sequências são funções lineares. No sentido de ultrapassar essas dificuldades, o autor refere que o professor deve ir mais além do que apenas perguntar aos alunos se identificam ou não alguma regularidade. Estes devem ser incentivados a verificar a veracidade das suas afirmações para todos os elementos de um conjunto de dados. Aconselha-se que, numa primeira fase, os alunos trabalhem com uma grande variedade de números, grandes e pequenos, no lugar de apenas exemplos demasiado triviais. Além disso, realça-se a importância de colocar também questões de forma inversa, como por exemplo, “50 é termo da sequência?”.

Matos (2007) sugere que o trabalho com padrões deve “basear-se na análise de alguns casos particulares organizados e representados de forma sistemática” (p. 25) e cita Verstappen (1982) ao apresentar “três modos principais de representar relações funcionais: (i) geometricamente, usando esquemas, diagramas, gráficos, entre outros; (ii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iii) algebricamente, com o uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências” (p. 25).

4. Unidade didática

O estudo exposto neste trabalho resulta de uma intervenção na unidade Funções, no 7.º ano de escolaridade. Neste capítulo, apresento a caracterização da escola e da turma, a planificação da unidade curricular, no que diz respeito à organização e às estratégias de ensino e aprendizagem adotadas e uma síntese das aulas realizadas.

4.1. Caracterização da escola e da turma

4.1.1. Caracterização da escola

A Academia de Música de Santa Cecília é uma escola com quase meio século de existência – fundada em 1964 pela Embaixatriz Vera Franco Nogueira – inicialmente instituição sem fins lucrativos e posteriormente classificada como instituição de utilidade pública. A Academia está localizada na freguesia da Ameixoeira, concelho de Lisboa, numa zona essencialmente residencial em crescente expansão e bem servida a nível de transportes públicos.

A Academia possui razoáveis instalações para a prática educativa, tendo sido recentemente objeto de obras de renovação. As instalações da Academia permitem não só a execução do projeto educativo singular de integração do ensino musical no convencional, mas também a realização de uma considerável amostra de atividades extracurriculares, como por exemplo, ballet, judo, desporto escolar, teatro e cursos de informática.

O projeto educativo seguido na Academia é único no contexto português por integrar o ensino convencional (do pré-escolar ao 12.º ano de escolaridade) e o ensino musical. O ensino da música contemplado nos planos de estudo próprios da Escola é gratuito, isto é, não tem um custo extra para além da mensalidade. Os alunos podem optar por uma formação essencialmente vocacionada para a música – tendo, normalmente, por objetivo ingressar na Escola Superior de Música – ou pela formação convencional que pode ou não ser suplementada com formação musical. Antigos alunos são hoje músicos conceituados na Orquestra Gulbenkian, na Orquestra Sinfónica Portuguesa e na Orquestra Metropolitana de Lisboa, docentes em Escolas de Música, musicólogos ou ainda críticos de Música. Este enfoque no ensino da música tem, algumas vezes, precedência sobre a normal atividade letiva, sendo necessário reagendar aulas aquando da realização de eventos musicais (por exemplo, atuações do coro).

A Academia de Música de Santa Cecília conta atualmente com cerca de 640 alunos de idades compreendidas entre os 3 e os 17 anos, 90 professores e 40 funcionários não docentes. Dada a característica privada do ensino na Academia com o pagamento de mensalidade por parte dos Encarregados de Educação, existe uma confluência de alunos de estratos sociais favorecidos. Assim, podemos afirmar que a maior parte dos alunos da Academia provém de agregados familiares de nível socioeconómico elevado, com uma considerável percentagem de pais com formação académica superior. Contudo, encontra-se também uma percentagem relevante de alunos de meios menos favorecidos e, normalmente, com o estatuto de bolseiros, como por exemplo, filhos de funcionários da Academia.

Por último, importa referir que – à semelhança da realidade de muitas escolas de cariz privado, existe uma tendência de continuidade dos alunos na Escola que entram no pré-escolar ou primeiro ciclo e se mantêm nos ciclos posteriores.

4.1.2. Caracterização da turma

A turma do 7.º ano de escolaridade objeto de estudo neste relatório é composta por vinte e cinco alunos, sendo que catorze são raparigas e onze rapazes, com, em média, 12 anos de idade. A maior parte dos alunos encontra-se na Academia de Música de Santa Cecília (AMSC) desde o pré-escolar ou primeiro ciclo. No entanto, quatro alunos ingressaram na AMSC no quinto ano e um aluno ingressou no presente ano letivo.

Todos os alunos da turma estão a frequentar o sétimo ano pela primeira vez, havendo um aluno que transitou com duas negativas e três alunos que transitaram com uma negativa. Globalmente, o aproveitamento e comportamento desta turma no ano letivo anterior foram avaliados como bons. Importa ainda referir que, nesta turma, existe uma aluna que está sujeita a um Plano Educativo Individual, devido a um problema de dislexia.

À semelhança da realidade escolar da Academia, também nesta turma os Encarregados de Educação (normalmente, os pais) possuem, na sua maioria, licenciatura ou grau superior e os alunos habitam maioritariamente dentro da área residencial da Escola. Quanto aos hábitos de estudo, grande parte dos alunos estuda com os pais e alguns admitem ter explicações particulares às disciplinas de Matemática e de Língua Portuguesa.

Relativamente à disciplina de Matemática, no questionário de início de ano letivo seis alunos destacaram a Matemática como algo que correu "menos bem" no ano letivo anterior (24%) enquanto três alunos consideraram que esta disciplina correu "bem" nesse mesmo ano (12%).

A turma é heterogénea quanto às capacidades cognitivas, ritmo de trabalho e de aprendizagem, pelo que é necessário promover o ritmo de aula diversificando as atividades ao longo da mesma.

A planta da sala de aula foi elaborada no início do ano letivo e sofreu alterações sempre que se considerou necessário com o afastamento de alguns alunos para evitar perturbações no funcionamento das aulas e de modo a promover a entreajuda de colegas.

Em relação à participação, de um modo geral, os alunos revelaram interesse pelos conteúdos e empenho nas atividades, procurando, quase sempre, participar de forma organizada. Naturalmente, no decorrer das aulas existiram situações em que interrupções à professora e aos colegas geraram alguma confusão, mas o restabelecimento da ordem foi prontamente assegurado.

Quanto ao cumprimento das regras na sala de aula, alguns alunos não tiveram continuamente uma atitude correta durante a aula, perturbando o seu decorrer nalgumas ocasiões. Neste campo, foi necessário estabelecer com os alunos regras de convivência favorecedoras de diálogo e de respeito por si e pelos outros e desenvolver uma cultura de responsabilidade.

Em relação ao aproveitamento no primeiro período do ano letivo 2010/2011, e focando-me nos níveis negativos nas várias disciplinas, um aluno teve nível negativo a quatro disciplinas, dois alunos obtiveram negativa a três disciplinas, um aluno teve duas negativas e dois alunos obtiveram negativa a uma disciplina. Na disciplina de Matemática, dois alunos obtiveram nível insuficiente, 13 alunos obtiveram nível suficiente, oito alunos obtiveram nível bom e dois alunos obtiveram nível muito bom.

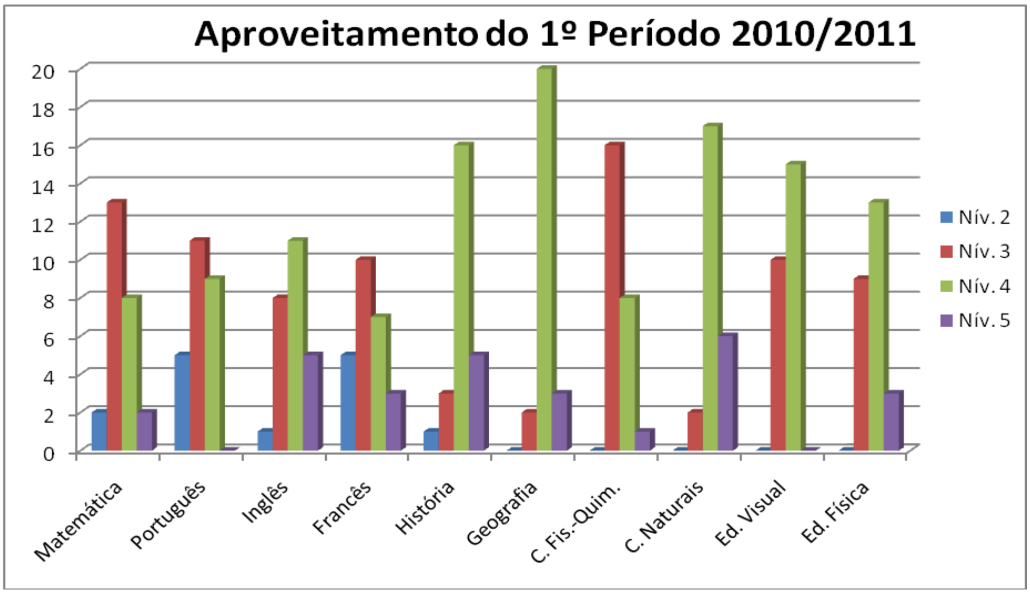


Figura 1 - Aproveitamento do 1.º Período 2010/2011

No segundo período, um aluno teve quatro disciplinas com nível negativo, um aluno obteve negativa a duas disciplinas e quatro alunos obtiveram negativa a uma disciplina. Na disciplina de Matemática, dois alunos obtiveram nível insuficiente, 11 alunos obtiveram nível suficiente, nove alunos obtiveram nível bom e três alunos obtiveram nível muito bom.

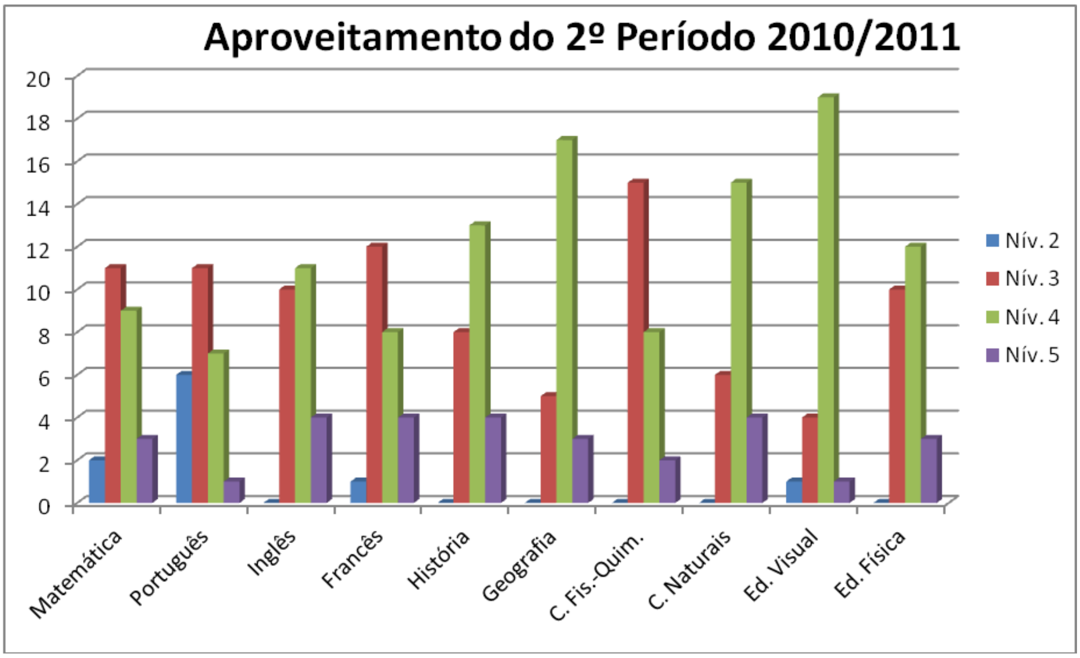


Figura 2 - Aproveitamento do 2.º Período

No terceiro período, um aluno teve negativa a três disciplinas, ficando retido no sétimo ano, dois alunos tiveram negativa a duas disciplinas e dois alunos tiveram negativa a uma disciplina. Na disciplina de Matemática, dois alunos obtiveram nível insuficiente, 14 alunos obtiveram nível suficiente, seis alunos obtiveram nível bom e três alunos obtiveram nível muito bom.

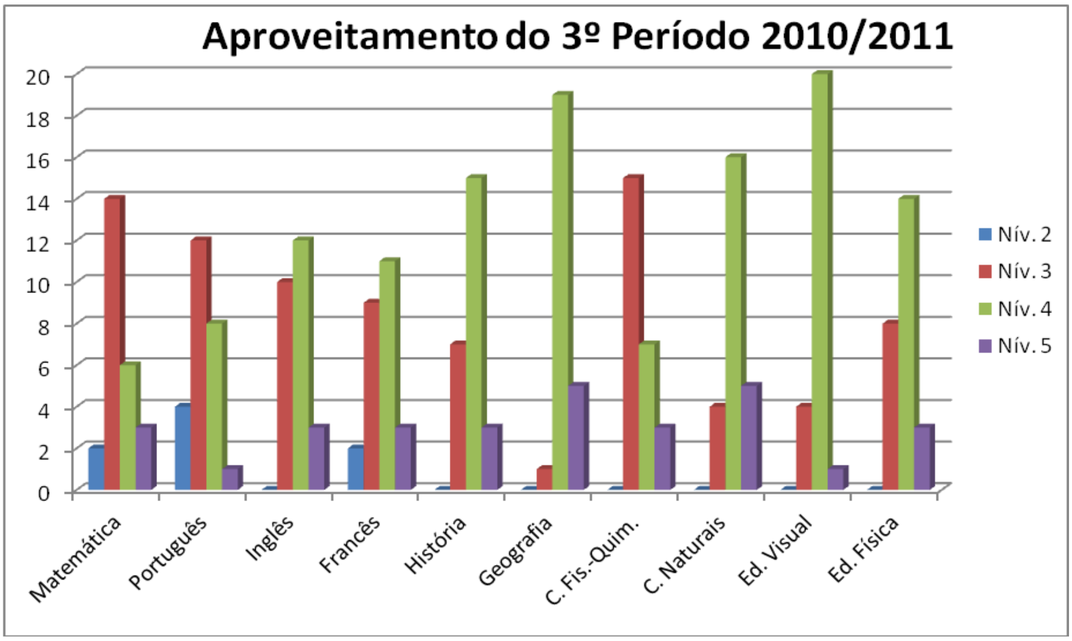


Figura 3 - Aproveitamento do 3.º Período 2010/2011

4.2. Planeamento da unidade didática

Como já referi, o estudo foi desenvolvido, na unidade didática Funções, numa turma do 7.º ano da Academia de Música de Santa Cecília, ao longo de cinco aulas de noventa minutos que decorreram no 3.º período, entre 16 de maio e 3 de junho de 2011.

4.2.1. Organização da unidade

Cabe aos professores criar um ambiente propício à aprendizagem e ter ações que encorajem os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções, tornando-os cidadãos autónomos e preparados para o futuro:

> O professor é responsável pela criação de um ambiente intelectual, no qual o raciocínio matemático sério constitui a norma. (…) Se aprenderem a formular conjeturas, a experimentar várias abordagens de resolução de problemas, a construir argumentos matemáticos e a contraargumentar, torna-se então, imperativa a criação de um ambiente que alimente este tipo de atividades (NCTM, 2007, p. 19).

Deste modo, uma boa aprendizagem carece essencialmente de uma boa estrutura de ensino, que não é de todo uma tarefa fácil. Para tentar contornar ao máximo as dificuldades existentes e tornar o processo de ensino aprendizagem o mais proveitoso possível, é fundamental refletir sobre o que se pretende ensinar, quais os objetivos e quais os procedimentos a adotar. A planificação torna-se, assim, uma prática de crucial importância na rotina de qualquer professor.

É referido por Paulo Abrantes (1985), no texto "Planificação do Ensino Da Matemática" que um plano de aula não pode ser rígido mas deve prever situações que possam surgir e a consequência do inesperado, formulando estratégias e modos de atuação. É de extrema importância que o professor se concentre em prever possíveis produções e dificuldades dos alunos de modo a potenciar ao máximo a exploração da tarefa no sentido de tornar as aprendizagens dos alunos realmente efetivas. Uma planificação não pode ser pensada como um pedaço de papel repleto com uma listagem de objetivos e procedimentos que pouco ou nada ajudam a melhorar as aprendizagens dos alunos. Deve ser um momento de introspeção, de ponderação precedente à aula no qual o professor se dedica por completo aos seus alunos e às suas necessidades específicas.

Aquando da elaboração da planificação de uma aula deve ter-se em conta os objetivos a serem atingidos, as características dos alunos, a natureza das tarefas a propor bem como o(s) método(s) de trabalho a desenvolver.

Em relação aos objetivos a atingir não devemos limitar-nos apenas aos objetivos específicos da unidade em questão. Devemos também fomentar o desenvolvimento de outras capacidades transversais, tais como, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, enfatizadas no Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007):

> A resolução de problemas é vista neste programa como uma capacidade fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber. (…)
> O raciocínio matemático é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. (…)
> Finalmente, a comunicação Matemática é uma outra capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática a que este programa dá realce. (…) O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. (p. 8)

Para isso, o tipo de experiências que se proporcionam nas aulas são fundamentais e decisivas para incutir nos alunos um espírito crítico, uma boa capacidade de raciocínio, gosto pela Matemática e competência para resolver problemas. A par disso, devem ser pensadas de acordo com os objetivos a atingir:

> A diversificação de tarefas e de experiências de aprendizagem é uma das exigências com que o professor se confronta, e a escolha das que decide propor aos alunos está intimamente ligada com o tipo de abordagem que decide fazer, de cunho essencialmente direto ou transmissivo, ou de carácter mais exploratório. (ME, 2007, p.11)

Não se deve esquecer que as tarefas e exemplos que são apresentados aos alunos devem ser pensados exclusivamente para eles. Cada turma tem as suas características próprias, as suas potencialidades e as suas limitações e cada tarefa pode e deve ser adaptada à turma em questão pois um bom exemplo para uns alunos pode não ser o mais adequado para outros.

Deste modo, na elaboração dos planos de aula, procurei dar continuidade à planificação a médio e a longo prazo elaborada por mim e pela outra professora responsável pelo 7.º ano de escolaridade, como também focar-me nos fins específicos deste estudo e nas características destes alunos em particular. Foram planificadas cinco aulas de 90 minutos (ver anexo I), onde se trabalharam os tópicos que se apresentam no quadro abaixo.

Quadro 2 - Planificação da unidade de ensino

<table>
<tr><td>Data</td><td>16 maio
(90 min)</td><td>23 maio
(90 min)</td><td>27 maio
(90 min)</td><td>30 maio
(90 min)</td><td>3 junho
(90 min)</td></tr>
<tr><td>Tópico</td><td colspan="2">Conceito de função. Formas de representação de uma função.</td><td colspan="2">Proporcionalidade direta como função.</td><td>Leitura e interpretação de gráficos em contexto real.</td></tr>
<tr><td>Obj. Esp.</td><td colspan="2">• Compreender o conceito de função.
• Identificar as variáveis dependente e independente.
• Determinar a imagem de um objeto e o objeto de uma imagem.
• Saber converter representações de uma função noutras e compreender as suas vantagens e limitações.</td><td colspan="2">• Definir função de proporcionalidade direta.
• Determinar a constante de proporcionalidade direta e analisar o seu papel.
• Representar gráfica e algebricamente situações de proporcionalidade direta.</td><td>• Analisar e comparar gráficos que traduzam situações da vida real.
• Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico.
• Modelar situações usando funções lineares.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="2">Ficha 1</td><td colspan="2">Ficha 2</td><td>Ficha 3</td></tr>
</table>

4.2.2. Estratégias de ensino aprendizagem

Uma das principais opções tomadas nesta investigação consistiu em introduzir o conceito de função retomando o trabalho, já iniciado, com sequências e regularidades. A razão desta escolha deriva essencialmente de duas considerações: as características da turma e as vantagens apontadas na literatura para se introduzir o conceito de função com base em padrões e regularidades, já referidas no capítulo anterior. Aquando da lecionação do capítulo “Sequências e regularidades” constatei que os alunos, na sua maioria, aderiram bem ao tema, mostrando entusiasmo e motivação na resolução das tarefas propostas. Por outro lado, muitas das tarefas relacionadas com sequências não fazem depender a sua resolução de pré-requisitos, o que facilita a integração de mais alunos nessas atividades.

Consequentemente, foram propostas aos alunos predominantemente tarefas que promovessem o estabelecimento de conexões entre sequências e funções. Foram ainda propostas tarefas que envolvessem situações de proporcionalidade direta e tarefas que envolvessem a modelação de funções em situações de contexto matemático ou não matemático. Neste estudo, embora se tenham observado casos de funções não afins, quase todos os exemplos trabalhados foram de funções afins, ou seja, de funções com taxa de variação constante.

No que diz respeito ao método de trabalho, apostei no trabalho a pares, culminando sempre com discussões em grande grupo, de modo a propiciar momentos de confronto e partilha de ideias. De grosso modo, cada aula contou com três momentos: a apresentação da tarefa, o trabalho desenvolvido pelos alunos e a discussão e síntese com toda a turma.

O momento de apresentação da tarefa é fundamental para que os alunos tomem o primeiro contacto com a atividade, conheçam as condições de trabalho e o tempo de que dispõem para concluí-la.

O segundo momento corresponde ao trabalho autónomo dos alunos. Contudo, o trabalho do professor não pode ser descurado nesta fase. Deve ter-se especial cuidado em como responder às interpelações dos alunos: indo em seu auxílio mas sem os conduzir de imediato à resposta. Para isso, é importante que o professor responda às dúvidas dos alunos com outras questões, mesmo que seja complicado resistir à tentação de resposta imediata. Deve incentivar-se os alunos na busca das suas próprias respostas, na troca de impressões e na formulação das suas próprias conjeturas. Torna-se, por vezes, necessário interromper este momento para esclarecer uma dúvida manifestada pela maioria dos alunos.

O terceiro momento, muitas vezes esquecido ou protelado para a aula seguinte, é o cerne para a consolidação dos conhecimentos. Aqui, discutem-se os diferentes resultados obtidos e o professor, conjuntamente com a turma, faz uma síntese dos conceitos abordados: "o ensino-aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas" (ME, 2007, p.8). Neste momento, desenvolvem-se também as capacidades de argumentação, comunicação e de raciocínio, que são vistas como capacidades transversais do Programa de Matemática do Ensino Básico:

> O professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas. A comunicação deve ter também um lugar destacado na prática letiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. (2007, p. 8)

É também nesta fase que o professor consegue "recuperar" os alunos que não concluíram a tarefa fazendo com que estes se sintam integrados na discussão e que consigam chegar à sistematização das ideias, tentando sempre aproveitar o seu contributo:

> O trabalho coletivo em turma é muito importante para proporcionar momentos de partilha e discussão bem como para a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, devendo o professor criar condições para uma efetiva participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho. (ME, 2007, p.10)

4.2.3. Tarefas utilizadas no processo de ensino aprendizagem

Os recursos implementados neste estudo, ou seja, o conjunto de tarefas propostas aos alunos, são uma parte importante desta proposta pedagógica que visa o desenvolvimento do conceito de função.

Ao longo das aulas do mestrado que foi muitas vezes discutida a importância de selecionar uma cadeia de tarefas coerente e não apenas um conjunto de tarefas isoladas. Ao preparar uma unidade didática como um todo, o professor deve ter como preocupação essencial hierarquizar os conteúdos. Uma visão global do programa permite, ao professor, "ganhar tempo". Permite-lhe fazer opções no sentido de promover uma verdadeira aprendizagem da Matemática. Ora, não é tarefa fácil priorizar objetivos, isto é, distinguir o que é essencial do que é acessório. Tal como também não é fácil tomar decisões sobre que tarefas propor, sobre que rumo dar a uma determinada tarefa de investigação, como explorar uma determinada tarefa, que opções fazer sobre a distribuição de tempo.

A dificuldade desta tarefa será acrescida se estas decisões forem tomadas sozinho, por um professor pouco experiente e novo na escola. Tornar-se-á menos árdua, melhor desempenhada e mais aceite pela restante comunidade escolar se for o grupo a tomar decisões e não um professor isolado. Mais uma razão, que reforça a importância do trabalho colaborativo entre pares da disciplina.

Ao conceber, à partida uma cadeia de tarefas, terá de existir, por parte do docente, uma maior preocupação em definir, cuidadosamente, os objetivos de aprendizagem que visa atingir com determinada tarefa pois cada uma pode ser explorada de diferentes formas, consoante os objetivos pretendidos e os conhecimentos prévios dos alunos. Este cuidado acrescido poderá minorar o perigo de se privilegiarem determinados aspetos programáticos em detrimento de outros.

Ao concebermos uma cadeia de tarefas temos mais possibilidades de oferecer aos alunos oportunidades de experimentarem um leque variado de situações e métodos de trabalho diversificados que lhes permitam desenvolver não só a aplicação imediata de conhecimentos, mas também outras capacidades, como a resolução de problemas.

> Em qualquer caso, é preciso que as tarefas no seu conjunto proporcionem um percurso de aprendizagem coerente que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem Matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. (ME, 2007, p.11)

A ordem pela que propomos as tarefas não deve também ser aleatória, caso contrário, corremos o risco de não proporcionar aos alunos uma oportunidade de uma aprendizagem enriquecedora. Ter uma visão global das tarefas pode minimizar a preocupação do professor com os atrasos ou avanços em cada aula e poderá "permitir" que cada aluno tenha o seu próprio ritmo de aprendizagem.

Para este estudo, elaborei três fichas de trabalho (anexo II) que contêm cada uma delas uma cadeia de tarefas. Na primeira ficha, selecionei tarefas com o objetivo de introduzir o conceito de função a partir de exemplos de sequências. Na segunda ficha, procurei aprofundar o estudo do conceito de função estudando, em particular, casos de funções representativas de situações de proporcionalidade direta. Na terceira ficha, selecionei exemplos de funções que modelassem situações de contexto real.

4.2.3.1. Ficha de trabalho n.º 1

Com a primeira ficha de trabalho procurei introduzir a noção de função como relação entre duas variáveis e trabalhar com as suas diferentes representações. De acordo com o que referi anteriormente, optei por retomar o estudo realizado com sequências no primeiro período do ano letivo. Deste modo, a estratégia principal foi invocar nos alunos a relação já trabalhada entre ordem e termo de uma sequência e, com base nessa correspondência, construir o conceito de função.

A ficha foi constituída por duas tarefas sendo que no enunciado figuravam sequências pictóricas, que de certa forma me pareceram mais apelativas para alunos deste grupo etário. Pretendi que a maioria dos alunos conseguisse, de forma natural, expressar por palavras uma relação entre duas variáveis e, de seguida, fosse capaz de a representar nas formas tabular, gráfica e algébrica.

4.2.3.2. Ficha de trabalho n.º 2

A ficha de trabalho n.º 2 serviu como arranque para a definição de função de proporcionalidade direta. Apesar de este conceito ser familiar aos alunos desde o 2.º ciclo, só no 3.º ciclo é que a proporcionalidade direta é vista como função.

Na primeira tarefa, apresentei dois casos: um referente a uma situação representativa de proporcionalidade direta (correspondência que à medida do lado de um quadrado faz corresponder o seu perímetro) e outra que não é uma situação de proporcionalidade direta (correspondência que à medida do lado de um quadrado faz corresponder a sua área).

Na segunda tarefa, apresentei um exemplo de uma situação de contexto real caracterizada pela não existência de proporcionalidade direta.

Com esta ficha, pretendi não só analisar situações de proporcionalidade direta isto é, funções do tipo $y = kx$, com $k \neq 0$, como também continuar o trabalho com as diferentes representações de uma função.

Note-se que nas tarefas da ficha de trabalho n.º 1 apenas figuravam funções com domínio restrito aos números naturais (ou seja, sequências) enquanto aqui optei por alargar o domínio aos números reais.

4.2.3.3. Ficha de trabalho n.º 3

O conjunto de tarefas existente nesta ficha visou permitir que os alunos contactassem com funções vistas num contexto real, fazendo uma leitura e interpretação apropriadas.

Na primeira tarefa, apresentei duas situações sobre remuneração distintas recorrendo à representação de dois gráficos no mesmo referencial. Pretendi que os alunos interpretassem as duas situações, distinguissem qual delas representava uma situação de proporcionalidade direta e construíssem as duas expressões algébricas (representando funções afins, uma linear e outra não linear).

Na segunda tarefa desta ficha, tive como objetivo que os alunos interpretassem o gráfico apresentado, salientando alguns aspetos importantes, como os tempos e locais de partida e de chegada, as distâncias totais percorridas, o período em que a distância a casa é constante, a análise das velocidades e elaborassem uma história coerente com o gráfico apresentado.

4.3. Síntese das aulas realizadas

Para este estudo foram realizadas cinco aulas de 90 minutos, que decorreram todas na sala habitual, onde todos os alunos têm lugar cativo (estipulado pelo diretor de turma), estando a maioria deles sentados dois a dois e quatro sentados individualmente. No entanto, nestas aulas os alunos foram todos colocados a pares e alguns destes foram reagrupados.

Todos os objetivos foram atingidos no final da unidade didática contudo houve necessidade de reestruturar alguns planos de aula devido a ajustes inerentes aos imprevistos que inevitavelmente ocorrem, tais como, falta de tempo ou dificuldades de aprendizagem acrescidas.

Apresento, de seguida, as sínteses dessas aulas, salientando as diferenças entre o planeado e o efetivamente concretizado.

4.3.1. Primeira aula: 16 de maio de 2011

Esta aula teve como finalidade que os alunos se começassem a familiarizar, ainda que informalmente, com a noção de função como relação de dependência entre duas variáveis.

Distribui as fichas de trabalho pelos grupos. Li a tarefa 1 em voz alta e estipulei um tempo para que os alunos a resolvessem. A aula não correu como inicialmente tinha previsto. Alguns grupos adiantaram-se para a tarefa 2 enquanto outros estavam com dificuldades na resolução da tarefa 1, mesmo com algumas sugestões da minha parte. Alguns alunos mostraram-se confusos, demorando algum tempo a determinar as expressões algébricas do perímetro e da área pois, ao invés de procurarem relacionar ordem e termo, fixavam a sua atenção no que se passava de figura para figura. Interrompi, por algumas vezes, a trabalho dos alunos fazendo observações a toda turma dada a existência de muitas dúvidas comuns.

Para que não se perdesse o tempo precioso da discussão, optei por iniciar a discussão embora nem todos os grupos tivessem finalizado as suas resoluções. Introduzi, informalmente, o conceito de função observando a dependência do perímetro e da área em relação à medida do lado do quadrado. Abordei também as representações tabular e gráfica destas funções, aproveitando para relembrar a terminologia relacionada com os referenciais cartesianos (eixo das abcissas, eixo das ordenadas, coordenadas,…). Falei, ainda que brevemente, sobre as vantagens e limitações que encontravam nas representações apresentadas.

Durante a discussão da tarefa, houve naturalmente grupos mais participativos que outros. A discussão foi mais rica que inicialmente esperado, no entanto, foi notório que para muitos alunos algumas questões não ficaram claras, em particular, as questões 1 d) e 1 e). A tarefa 2 foi remetida para trabalho de casa.

Concluída a aula, considerei que os objetivos não foram totalmente atingidos pois para além das duas últimas questões da tarefa 1 não terem sido compreendidas por grande parte dos alunos, a ideia de dependência também não ficou clara para alguns deles. Assim sendo, refiz a planificação da aula seguinte tendo em conta o sucedido.

4.3.2. Segunda aula: 23 de maio de 2011

Iniciei a aula retomando a discussão sobre as últimas duas questões da tarefa 1 da ficha de trabalho n.º 1. Tentei enriquecer a discussão abordando estas questões sob diferentes ângulos.

O segundo momento da aula ficou reservado à discussão da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 1 que tinha sido remetida para trabalho de casa. Como alguns alunos não tinham realizado a tarefa, optei por dar alguns minutos para que pudessem ler o enunciado e, se possível, pensar um pouco nas primeiras questões. Este tempo não foi prolongado para não se perder tempo da discussão e para que os restantes alunos não se dispersassem.

A tarefa foi integralmente corrigida e introduzi, formalmente, os conceitos de função, domínio, contradomínio, objeto e imagem. Calcularam-se as imagens correspondentes a alguns objetos e os objetos a que correspondiam algumas imagens usando, para isso, as representações tabular, algébrica e gráfica. Em cada caso discutiu-se qual seria a melhor representação a usar.

Procurei também dar exemplos de correspondências que não representavam funções e discutir qual a representação gráfica dessas correspondências.

A aula correu bastante melhor do que a primeira cumprindo, assim, os objetivos que se pretendia. Contudo, não houve tempo para se fazer um registo escrito dos conceitos abordados, ficando este remetido para a aula seguinte.

4.3.3. Terceira aula: 27 de maio de 2011

Dei início à aula dando dois exemplos de correspondências: uma que representava uma função e uma que não representava uma função. Após se verificar qual delas era função, coloquei aos alunos algumas questões sobre os conceitos abordados na aula anterior (objeto, imagem, variável dependente, variável independente, domínio e contradomínio) e construíram-se as diferentes representações dessa função (tabular, algébrica, sagital e gráfica).

Alertei os alunos para que o facto de na representação algébrica ser fundamental a escrita do domínio, dando exemplos de funções diferentes mas com a mesma expressão algébrica. Note-se que nos casos em que o domínio é um conjunto não discreto não foi possível utilizar ainda a notação de intervalo pois os alunos não estão familiarizados com os números reais. Discutiu-se também em que situações deveriam unir-se ou não os pontos marcados numa representação gráfica de uma função afim.

De seguida, projetei uma síntese dos conceitos abordados para que os alunos pudessem fazer um registo destas definições, frisando a diferença entre conjunto de chegada e contradomínio. Apesar de ser quase sempre um assunto de difícil abordagem, optei por introduzir alguma notação relativa a funções, por ser imprescindível na escrita simbólica.

Posto isto, dei início à segunda parte da aula. Distribui pelos alunos uma ficha de trabalho e pedi-lhes que resolvessem a tarefa 1 a pares em vinte minutos. Esta ficha de trabalho introduz o conceito de proporcionalidade direta apesar de o conceito já ser familiar aos alunos desde o segundo ciclo.

Posteriormente, realizou-se a discussão da tarefa em grande grupo. A maioria dos alunos respondeu corretamente às questões colocadas na ficha de trabalho. Não houve grandes dúvidas na identificação das funções representativas de situações de proporcionalidade direta.

Tinha ainda como objetivo para esta aula discutir as conjeturas estabelecidas pelos alunos sobre o aspeto do gráfico de uma função de proporcionalidade direta e de que tipo seria a sua expressão algébrica, porém, não houve tempo suficiente e tal foi remetido para a aula seguinte.

4.3.4. Quarta aula: 30 de maio de 2011

Esta aula foi dedicada à discussão dos conceitos contemplados na ficha de trabalho resolvida na aula anterior, à exploração de situações particulares e à síntese das ideias principais a reter.

Iniciei a aula retomando a discussão das situações 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 2. Analisou-se a tabela representativa da situação de proporcionalidade direta e fizeram-se observações importantes, tais como: o quociente entre correspondentes valores das duas grandezas em questão é sempre constante, se uma grandeza aumenta/diminui numa determinada proporção a outra aumenta/diminui nessa mesma proporção, os "saltos" são constantes. Perguntei à turma se esta última propriedade era suficiente para que pudéssemos concluir que as grandezas eram diretamente proporcionais. A maioria respondeu afirmativamente. Dei então o seguinte contraexemplo: duas grandezas que se relacionam de acordo com a expressão $y = 4x + 1$, satisfazem essa propriedade mas não são diretamente proporcionais pois o quociente $\frac{y}{x}$ não é constante.

Discutiu-se como seria a forma de um gráfico que representa uma função de proporcionalidade direta. Pedi aos alunos que calculassem o quociente entre a ordenada e a respetiva abcissa de pares ordenados pertencentes ao gráfico da função e que verificassem que esse valor era sempre constante e que correspondia à constante de proporcionalidade direta.

Analisaram-se as diferentes expressões algébricas obtidas pelos alunos. A maioria deles obteve a expressão $P = 4l$, mas só alguns compreenderam que esta expressão era equivalente a $\frac{P}{l} = 4$, e que 4 era a constante de proporcionalidade. Discutiu-se também o significado da constante de proporcionalidade.

Os alunos registaram no caderno diário as definições de grandezas diretamente proporcionais, a expressão algébrica geral destas funções bem como a sua representação gráfica.

De seguida, pedi aos alunos para que se debruçassem sobre a questão 2 da ficha de trabalho n.º 2. Corrigiu-se, pouco depois, esta questão que suscitou, por parte de alguns alunos, dúvidas na interpretação inicial da situação. Fez-se notar a diferença entre a representação gráfica de funções afins não lineares e de funções lineares. Mais uma vez, alguns alunos demonstraram dificuldade na escrita da expressão algébrica de uma função afim não linear.

Já não houve tempo para os alunos resolvessem uma tarefa do manual, que tinha sido planeada, sobre a influência do parâmetro k no gráfico de funções lineares do tipo $y = kx, k \neq 0$. ($k > 0$). Porém, mesmo assim, resolvi mostrar aos alunos um ficheiro Excel que ilustrava tal influência, remetendo para trabalho de casa a realização desta tarefa.

4.3.5. Quinta aula: 3 de junho de 2011

Dei início à aula recolhendo o trabalho de casa pedido na aula anterior e distribuindo a terceira ficha de trabalho, dando quinze minutos para que os alunos executassem a tarefa 1.

Os alunos levaram mais tempo do que o previsto. Alguns deles manifestaram alguma dificuldade com a representação de duas funções no mesmo referencial porém, passada esta dificuldade inicial compreenderam relativamente bem o resto da tarefa. A questão 1 e) relativa à escrita de uma expressão algébrica de uma função afim não linear gerou dificuldade acrescida para alguns alunos mas, para outros, foi bastante imediata.

Na discussão, surgiram várias formas de escrever a expressão algébrica usando diferentes variáveis. Aproveitei para construir uma representação tabular das referidas funções e para relembrar os conceitos de objeto, imagem, variável dependente e variável independente.

De seguida, pedi aos alunos que elaborassem uma história coerente com o gráfico da questão 2, aconselhando-os a não esquecer aspetos como: horário de saída e volta a casa, distâncias percorridas e velocidades. Tendo em conta, que muitos grupos estavam a mostrar dificuldades na interpretação do gráfico, optei por fazer uma interrupção e iniciar a sua análise em conjunto. Após esta ajuda inicial, os alunos mostraram-se capazes de prosseguir com o seu trabalho.

Durante discussão, uma aluna começou por ler a história que tinha construído com o seu par. Pedi a outro grupo (que tivesse outro tipo de informações) que lesse também a sua história. No final, foi escrita no quadro uma síntese dos aspetos importantes que tinham sido mencionados tais como: o horário de saída e volta a casa, as distâncias percorridas, períodos em que a distância a casa cresce, decresce ou se mantém constante. Calcularam-se também as velocidades nos diferentes trajetos. Em geral, os alunos interpretaram corretamente o gráfico. A velocidade foi a questão que apresentou maiores dificuldades possivelmente devido à definição física deste conceito. No entanto, a maioria dos alunos compreendeu que quanto mais inclinado estivesse o segmento de reta maior era a velocidade correspondente a esse intervalo de tempo.

5. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, apresento as opções metodológicas tomadas, os métodos e os instrumentos utilizados para proceder à recolha de dados. Descrevo igualmente como foram selecionados os participantes e qual foi o processo de análise de dados usado.

5.1. Opções metodológicas

O tipo de metodologia utilizado numa investigação depende essencialmente da natureza do estudo a efetuar. Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma investigação qualitativa deve assentar nos seguintes princípios: i) os dados devem ser recolhidos no ambiente natural e o investigador deve ser o instrumento principal de recolha de dados; ii) os dados recolhidos devem ser de natureza descritiva; iii) os processos devem ser a principal fonte de interesse do investigador; iv) a análise de dados deve ser feita de forma indutiva e v) deve dar-se especial importância ao ponto de vista dos participantes. Estas características coadunam-se fortemente com o objetivo desta investigação. Neste estudo, os dados são recolhidos por mim (professora/investigadora) no contexto de ensino aprendizagem e assumem a forma de palavras e/ou de imagens que visam permitir-me responder às questões inicialmente formuladas. Pretendo compreender o raciocínio dos alunos e perceber de que forma mobilizam eles os seus conhecimentos. Não estou só interessada no produto final mas principalmente no processo que conduziu àqueles resultados. Não estabeleço previamente nenhuma hipótese que tento confirmar ou infirmar. Além disso, a grande preocupação é com o ponto de vista dos alunos.

Este estudo é simultaneamente descritivo e interpretativo. É descritivo pois pretende descrever de que forma os alunos resolvem as tarefas propostas e interpretativo pois procura compreender a forma como os alunos raciocinam e mobilizam os seus conhecimentos.

Trata-se, deste modo, de uma abordagem qualitativa que assenta no paradigma interpretativo, onde são valorizadas as interpretações dos alunos, cabendo ao investigador explicitar o seu significado. Contudo, como complemento, analisei também dados quantitativos recolhidos a partir de um teste escrito realizado no final da unidade didática.

5.2. Os participantes

Como já referi, os participantes deste estudo foram os alunos de uma turma do 7.º ano da Academia de Música de Santa Cecília. A turma em questão bem como a escola já foram retratados sumariamente no capítulo anterior.

No início do ano letivo 2010/2011, antes de iniciar o estudo, foi pedida uma autorização à direção da Escola e aos encarregados de educação (Anexos V). Todos os pedidos de autorização solicitados aos encarregados de educação vieram devolvidos com a respetiva autorização assinada.

Embora toda a turma tenha participado no estudo, realizando as tarefas propostas nas aulas e o teste escrito final, a recolha de dados foi feita, com especial incidência, com três grupos de dois alunos e só estes realizaram a entrevista final.

A escolha dos três grupos de alunos decorreu de acordo com os seguintes critérios: aproveitamento escolar distinto, atitude diferente em relação à disciplina de Matemática e disponibilidade para participar neste estudo. Formei, assim, um par de alunos com boa intuição matemática e boa capacidade de raciocínio (Jorge – que obteve nível quatro no 1.º período e nível cinco nos 2.º e 3.º períodos e Martim

– que obteve nível três durante os três períodos do ano letivo), um par de alunos empenhado e esforçado na sua aprendizagem (Carolina – que obteve nível quatro durante os três períodos do ano letivo e Laura – que obteve nível três nos 1.º e 2.º períodos e nível quatro no 3.º período) e um par de alunos com uma atitude de desinteresse no que toca a esta disciplina onde se denota alguma falta de empenho e de trabalho (Pedro – que obteve nível três durante os três períodos e Nuno – que obteve nível quatro durante os três períodos). Uma caracterização sumária destes alunos é feita no capítulo seguinte. No sentido de preservar o anonimato dos alunos foram todos identificados com nomes fictícios.

5.3. Recolha de dados

Neste tipo de estudo de caráter qualitativo, é sem dúvida importante obter informações por diversas fontes, de modo a permitir uma abordagem por diferentes perspetivas que possam complementar-se (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, há a possibilidade de realizar um trabalho mais sustentado e fundamentado e, de certa forma, mais credível. Com intuito de obter respostas às questões formuladas, usei diversos métodos de recolha de dados: o recurso a produções escritas dos alunos, a observação com registo áudio e vídeo e a realização de uma entrevista final aos grupos selecionados.

5.3.1. Produções escritas dos alunos

Nas aulas, os alunos resolveram tarefas a pares, que foram posteriormente discutidas em grande grupo, a maioria das vezes na própria aula. Tendo em conta, que esta forma de atuação impede que o professor/investigador tenha acesso às resoluções dos alunos antes que seja feita a discussão geral, resolvi dar a cada aluno uma ficha onde deveria resolver a tarefa com o seu par. Posteriormente, um deles entregou-me a ficha (antes da discussão em grupo) ficando o par com a outra ficha para discussão e registo. Na aula seguinte, devolvi-lhes a outra ficha, já fotocopiada por mim, que deveriam completar de acordo com os apontamentos do colega. Pretendi assim, desenvolver a autonomia e o sentido de responsabilidade nos alunos, incentivando-os a tomar as suas próprias notas.

A análise posterior das tarefas visou permitir compreender as estratégias utilizadas pelos alunos, as dificuldades sentidas e/ou o tipo de conceções erróneas que foram estabelecidas. Tendo em conta, que houve uma sequência de aulas, e sendo a noção de função transversal a toda a unidade didática, pôde observar-se a evolução do aluno na construção deste conceito.

No entanto, as fichas de trabalho 1 e 2 foram trabalhadas em quatro aulas. Pude fazer o planeado para as tarefas iniciais mas não para todas. Ora, mesmo alertados para deixarem as suas produções autênticas, os alunos tendem a corrigir e/ou a completar as suas resoluções, comprometendo o estudo. O recurso ao registo áudio permitiu minimizar esta situação, auxiliando a compreensão do que foi escrito antes ou depois da discussão em grupo.

Como complemento, considerei também os resultados quantitativos dos alunos no teste escrito realizado no final da unidade didática embora não tenha analisado, neste relatório, as suas resoluções.

5.3.2. Observação de aulas com registo áudio

Este estudo envolveu duas facetas do papel do professor: o professor enquanto docente e enquanto investigador da sua prática letiva. Embora esta segunda faceta seja, muitas vezes, esquecida e subestimada, deve fazer parte do quotidiano do professor, como profissional dedicado e em contínua formação e aprendizagem. Numa investigação sobre a prática, há necessidade de fazer-se um registo sistemático sobre os principais acontecimentos ligados ao estudo em curso. Ora, esta tarefa revela-se complexa pois, enquanto observador, o professor necessita de concentração, atenção, sensibilidade, disciplina e, sem dúvida, discernimento. O discernimento é importante para conseguir separar uma observação de uma interpretação (ou opinião) sobre essa observação. Consequentemente, não é fácil ser um bom observador estando-se a desempenhar simultaneamente outros papéis. Os alunos desta idade ainda não desenvolveram autonomia suficiente e requisitam com frequência o professor para esclarecimento de dúvidas, pelo que, não foi viável que o docente pudesse, em simultâneo, registar o que acontece ou não à sua volta. Nestes termos, elaborei, no final de cada aula, um balanço global dos acontecimentos, procurando salientar os aspetos positivos e os menos conseguidos, recordando as principais interações dos alunos. Como auxiliar precioso nesta tarefa contei com o registo áudio. Coloquei gravadores áudio nas mesas dos três pares de alunos que foram o foco principal deste estudo, para assim ter acesso às discussões do par aquando das resoluções das tarefas, permitindo perceber com maior clareza as estratégias pelas quais optaram, a razão dessas escolhas, o modo como interagiram, entre outros aspetos. Todavia, o registo áudio implementado junto dos três grupos nem sempre foi totalmente audível devido ao ruído envolvente.

5.3.3. Entrevistas

Realizei ainda uma entrevista (anexo III) a cada um dos três pares de alunos. Segundo Bogdan e Biklen (1994) este instrumento é utilizado "para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (p. 134), constituindo, neste sentido, uma fonte de dados bastante rica.

Na entrevista, realizada no fim da lecionação da unidade didática e após o teste escrito, os alunos foram conduzidos a resolver tarefas semelhantes às realizadas na aula, explicitando oralmente os raciocínios que teciam na sua elaboração. As entrevistas foram realizadas no intervalo de almoço e durante uma aula de Estudo Acompanhado da qual os alunos foram dispensados. Note-se que resolvi deixar que os alunos usassem máquina de calcular quando assim o entendessem, para evitar que se dispersassem com cálculos.

A gravação em vídeo revelou-se essencial para permitir uma reconstituição dos diálogos envolvidos bem como para identificar a postura dos alunos ao longo da resolução, os momentos de hesitação, os olhares, os momentos em que apontam para determinada figura, entre outros aspetos. O vídeo revelou-se pois um auxiliar precioso na compreensão do raciocínio dos alunos.

5.4. Análise de dados

A análise de dados é das etapas mais importantes da investigação. É com a análise dos dados que o investigador vai descrever, explicar, retirar conclusões do seu estudo e responder às questões formuladas inicialmente.

Esta análise incidiu nas informações e produções realizadas ao longo das cinco aulas lecionadas e na entrevista realizada. Comecei por organizar as produções escritas dos alunos de cada uma das tarefas. De seguida, procedi à transcrição das gravações áudio e vídeo dos três grupos de alunos. Do universo das produções dos alunos, selecionei as que melhor fornecessem dados que permitissem responder às questões abordadas na investigação. Para responder à questão da compreensão da noção de função analisei as questões 1 a) (situações 1 e 2) da ficha de trabalho n.º 2 (anexo II), as questões b) e c) da entrevista (anexo III) e as questões 1, 2.1, 2.2, 2.3 e 3.2 do teste escrito (anexo IV). Para analisar a flexibilidade na mudança de representação tive em conta as questões 2 a), 2 c) e 2 d) da ficha de trabalho n.º 2 (anexo II), as questões 1 a) e 1 e) da ficha de trabalho n.º 3 (anexo II), as questões a), e) e f) da entrevista (anexo III) e as questões 3.1 e 3.3 do teste escrito (anexo IV).

6. Apresentação e análise de dados

Optei por organizar o presente capítulo em três subcapítulos. No primeiro subcapítulo, faço uma breve caracterização dos alunos participantes neste estudo. No segundo subcapítulo, dividido em duas partes – de acordo com a primeira e segunda questões de investigação – analiso algumas tarefas das fichas de trabalho e da entrevista final. Por fim, no terceiro subcapítulo apresento os resultados quantitativos do teste escrito final.

6.1. Os alunos

6.1.1. Jorge e Martim

O Jorge tem 12 anos, frequenta a escola desde os três anos de idade e está muito bem integrado. A sua disciplina preferida é Matemática e a que menos gosta é Educação Visual. O Jorge é um aluno com muito bom em Matemática, tendo obtido nível quatro no 1.º período e nível cinco nos 2.º e 3.º períodos. É um aluno simpático, extrovertido e alegre. Nas aulas, Jorge é um aluno atento, participativo e muito rápido a realizar as tarefas propostas. Apesar de ser um aluno com muito bom desempenho em Matemática, não é um aluno "exemplar" e nem sempre realiza os trabalhos de casa, admitindo que não estuda muito para a disciplina pois não sente "necessidade".

Martim tem também 12 anos e frequenta a escola desde o 5.º ano de escolaridade. A sua disciplina preferida é Português e a que menos gosta é Educação Física. Na generalidade das disciplinas, o Martim é um aluno desempenho médio tendo obtido, na disciplina de Matemática, nível três durante todo o ano letivo. É um aluno, que apesar de demonstrar estar relativamente bem integrado, é reservado na relação com os colegas e com os professores. Apesar disso, mostra-se participativo nas aulas de Matemática, chamando a professora sempre que julga necessário. Em casa, o Martim confessa que só realiza os trabalhos de casa de Matemática "às vezes" e que prefere dedicar o seu tempo de estudo às línguas.

Estes dois alunos aceitaram de bom grado integrar o mesmo grupo e fazerem parte do estudo. O par funcionou muito bem, com um bom ritmo de trabalho e uma boa qualidade nas resoluções das tarefas propostas. Apesar de mais reservado, Martim mostrou-se bastante comunicativo e participativo durante a experiência.

6.1.2. Carolina e Laura

A Carolina tem 12 anos e apesar de só frequentar esta escola desde o 4.º ano de escolaridade, demonstra estar muito bem integrada. A sua disciplina preferida é Educação Física e a que tem mais dificuldades é Física e Química. Na generalidade das disciplinas, a Carolina é uma aluna com bom aproveitamento, tendo obtido nível quatro durante os três períodos do ano letivo 2010/2011. É uma aluna simpática e afável quer para os professores quer para os seus colegas. Nas aulas, é uma aluna responsável e empenhada, envolvendo-se ativamente nas tarefas propostas. Em casa, tenta realizar sempre os trabalhos de casa embora confesse que deveria estudar com mais regularidade e não apenas "em cima da hora".

A Laura tem também 12 anos mas frequenta a escola desde o 1.º ano e está muito bem integrada na escola. A sua disciplina preferida é História e as disciplinas onde tem mais dificuldades são Matemática e Física e Química. Em geral, a Laura é uma aluna de nível médio/bom tendo obtido, a Matemática, nível três nos 1.º e 2.º períodos e nível quatro no 3.º período. É uma aluna muito simpática e afetuosa quer para com os seus colegas quer para os professores. Nas aulas, a Laura demonstra ser trabalhadora apesar de um pouco conversadora. Realiza regularmente os trabalhos de casa propostos mas só estuda, como reconhece, “mais perto” dos testes.

As duas alunas já eram colegas de carteira e aceitaram com muito entusiasmo serem participantes neste estudo. Durante a realização das tarefas propostas, as alunas mostraram-se muito empenhadas e trabalhadoras, funcionando muito bem em grupo, expondo os seus raciocínios e tendo o cuidado de se fazerem ouvir na gravação áudio do gravador.

6.1.3. Nuno e Pedro

O Nuno tem 12 anos e frequenta a escola desde os três anos de idade, sendo um aluno muito popular na comunidade escolar. A sua disciplina preferida é Educação Física e a que menos gosta é Francês. No geral, o Nuno é um aluno de nível médio/bom, tal como na disciplina de Matemática, onde durante todo o ano letivo obteve o nível quatro. É um aluno bem-disposto e extrovertido tendo uma atitude despreocupada em relação ao estudo. Nas aulas, é um aluno um pouco conversador e distraído. Porém, quando está atento, tem uma participação de qualidade. Em casa, é pouco trabalhador, dedicando pouco tempo ao estudo, como reconhece.

O Pedro tem também 12 anos e, tal como o Nuno, frequenta a escola desde os três anos de idade demonstrando estar bem integrado quer na escola quer na turma. É um aluno simpático e bem-educado para com os seus colegas e professores. A sua disciplina preferida é Educação Física e a que menos gosta é Educação Visual. Na generalidade das disciplinas, é um aluno com desempenho médio. Durante o 7.º ano de escolaridade, o aluno obteve nível três na disciplina de Matemática, durante todo o ano letivo, apesar de ter tido alguns testes escritos com classificação insuficiente. Nas aulas, o aluno revela-se conversador, pouco atento e pouco trabalhador. Contudo, surpreende, por vezes, com bons raciocínios, fundamentalmente em conteúdos que não necessitem de pré-requisitos. Em casa, diz-se “preguiçoso” e confessa que raramente faz os trabalhos remetidos para casa e só estuda “um pouco” na véspera dos testes.

O Pedro e o Nuno são bons amigos. Quando lhes foi proposto que trabalhassem em grupo, aceitaram de imediato. Nuno, talvez por ser mais extrovertido, foi o “líder” do grupo, impondo algum ritmo de trabalho e sendo o elemento mais comunicativo. Porém, o grupo revelou um ritmo de trabalho muito lento e pouco empenho na resolução das tarefas.

6.2. Análise de tarefas contidas nas fichas de trabalho e na entrevista final

6.2.1. Noção de função

Conforme já referi, para analisar de que forma é que a noção de função é encarada pelos alunos, foquei-me nas tarefas 1 a) das situações 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 2 (anexo II) e na questão b) da entrevista (anexo III), além dos resultados quantitativos do teste escrito (anexo IV) que analisarei posteriormente.

Na ficha de trabalho n.º 2 é apresentada uma sequência de quadrados e duas situações são propostas: uma em que se considera a correspondência que à medida do lado de cada quadrado faz corresponder o seu perímetro e outra em que à medida do lado de cada quadrado faz corresponder a sua área.

Na entrevista é apresentada, em linguagem corrente, uma situação que relaciona o preço a pagar com o número de jogos de *bowling* realizados.

Nas questões 1 a) (situação 1 e 2) da ficha de trabalho n.º 2 e na questão b) da entrevista pede-se aos alunos que indiquem se a correspondência descrita no enunciado é ou não uma função e que justifiquem adequadamente a sua escolha.

6.2.1.1. Jorge e Martim

Ficha de trabalho n.º 2:

Nas situações 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 2, o grupo do Jorge e do Martim constata de imediato, e sem qualquer dificuldade, que se trata de uma função apresentando uma justificação adequada às variáveis em causa (figuras 4 e 5).

Sim, porque a cada medida de lado do quadrado corresponde um e um só perímetro.

Figura 4 - Resolução da questão 1 a) da situação 1 da ficha de trabalho n.º2 por Jorge e Martim

Sim, porque a cada medida do lado corresponde uma e só uma área.

Figura 5 - Resolução da questão 1 a) da situação 2 da ficha de trabalho n.º2 por Jorge e Martim

Entrevista:

Na questão b) da entrevista, os dois alunos continuam a mostrar-se capazes de reconhecer correspondências que são funções, apresentam uma justificação adequada às variáveis em causa (figura 6) e identificam corretamente as variáveis independente e dependente (figura 7).

Sim, porque a cada n.º de jogos correspon-de um e um só preço.

Figura 6 - Resolução da questão b) da entrevista por Jorge e Martim

A variável independente é o nº de jogos e a dependente é o preço.

Figura 7 - Resolução da questão c) da entrevista por Jorge e Martim

6.2.1.2. Carolina e Laura

Ficha de trabalho n.º 2:

Nas questões 1 a) das situações 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 2, Carolina e Laura mostram-se bastante confusas relativamente à noção de função (figura 8). Na situação 1, embora enunciem corretamente a definição de função, demonstram não compreender o que ela expressa. As alunas não se mostram capazes de adequar a definição à situação em causa, não percebendo qual a correspondência em questão e não identificando corretamente as variáveis independente e dependente, como se pode constatar no diálogo seguinte:

Laura: Então… uma função é … uma…

Carolina: … uma… que cada objeto…

Laura: … pois cada objeto corresponde uma e uma só imagem…

Carolina: Pois… Aqui… um quadrado só tem uma medida de lado…

Laura: Sim… é função porque a cada quadrado corresponde uma e uma só medida de lado

a) A correspondência descrita anteriormente representa uma função? Justifica a tua resposta.

Sim, porque a cada quadrado corresponde uma e uma só medida de lado.

Figura 8 - Resolução da questão 1 a) da situação 1 da ficha de trabalho n.º 2 por Carolina e Laura

Na situação 2, as alunas continuam a mostrar não compreender o conceito de função, confundindo este conceito com a noção de função injetiva (figura 9). Além de apresentarem uma justificação incorreta, não adaptam a justificação às variáveis em causa.

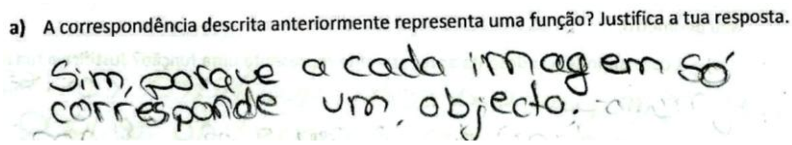
Laura: Esta também é.

Carolina: Pois… A cada imagem corresponde um e um só perímetro…

Laura: Sim… Não… Aqui já não é perímetro…

Carolina: Ah! É área… Mas como é que escrevemos?

Laura: Eh… pomos só… a cada imagem só corresponde um objeto.


a) A correspondência descrita anteriormente representa uma função? Justifica a tua resposta.

Sim, porque a cada imagem só corresponde um objecto.

Figura 9 - Resolução da questão 1 a) da situação 2 da ficha de trabalho n.º 2 por Carolina e Laura

Entrevista:

Na entrevista a prestação do grupo já é diferente, mostrando conhecer e compreender o conceito de função. Embora nos seus raciocínios pensem nas variáveis em causa, na escrita da resposta optam pela noção genérica de função, especificando as variáveis em causa só quando lhes é pedido (figura 10):

Laura: … Então… para ser função… a cada objeto uma imagem.

Carolina: Uma imagem…

Laura: Sim.

Carolina: Eu acho que sim.

Laura: Pois a cada objeto… a cada número de coisas corresponde a um preço

(Laura escreve na ficha lendo, em voz alta, o que vai escrevendo)

Laura: Sim, porque a cada objeto…

Professora: Especifiquem…

Laura: Número de jogos… corresponde uma e uma só imagem…

Carolina: … o preço.

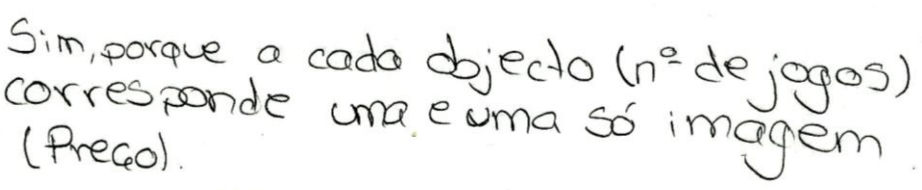


Figura 10 - Resolução da questão b) da entrevista por Carolina e Laura

Também, identificam corretamente as variáveis dependente e independente (figura 11).

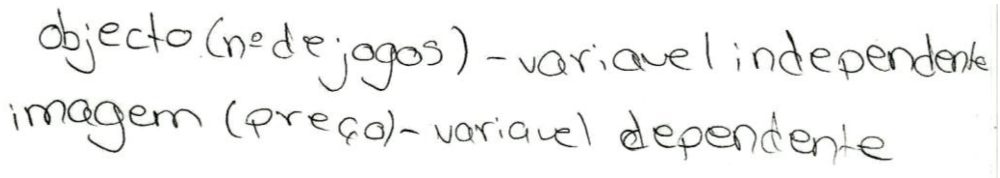


Figura 11 - Resolução da questão c) da entrevista por Carolina e Laura

6.2.1.3. Nuno e Pedro

Ficha de trabalho n.º 2:

Na questão 1 a) da situação 1 da ficha de trabalho n.º 2, este grupo mostra inicialmente não se recordar da definição de função, solicitando o apoio da professora:

Professora: Então… O que é uma função?

Nuno: Eh….

Professora: É uma correspondência…

Pedro: Ah! É uma correspondência a que um objeto corresponde uma única imagem…

Professora: Exato. De que correspondência é que estamos a falar?

Nuno: Eh…

Professora: Leiam o enunciado.

Nuno: … a cada medida de lado corresponde um perímetro.

Professora: Então, se tenho um quadrado com uma determinada medida de lado a quantos perímetros corresponde?

Nuno: Só um.

Professora: E a todas as medidas dos lados corresponde sempre um perímetro. Então? É ou não função?

Pedro: É.

Professora: Porque…

Pedro: Porque a cada lado corresponde um só perímetro.

R: É, pois, a cada lado corresponde um e só um perímetro.

Figura 12 - Resolução da questão 1 a) da situação 1 da ficha de trabalho n.º 2 por Nuno e Pedro

Na situação 2, o grupo fornece, sem ajuda, uma justificação correta e adequada às variáveis em causa: "A cada medida de lado de um quadrado apenas corresponde uma área."

Entrevista:

Na questão b) da entrevista, este grupo apresenta uma justificação adequada às variáveis em causa (figura 13), embora haja uma breve hesitação entre a escolha da variável independente e a dependente, como se pode verificar pelo que diz o Nuno: "Sim… porque a cada… preço corresponde um só jogo… quer dizer a cada número de jogos corresponde um único preço…".

R: É uma funcão pois a cada número de jogos corresponde um único preço.

Figura 13 - Resolução da questão b) da entrevista por Nuno e Pedro

Na questão c), o grupo identifica corretamente as variáveis dependente e independente (figura 14).

A dependente é o preço e a independente é o nº de jogos

Figura 14 - Resolução da questão c) da entrevista por Nuno e Pedro

6.2.2. Representações

Nas várias questões analisadas estão presentes as várias representações de uma função (verbal, tabular, gráfica e algébrica). O objetivo da análise que se apresenta nesta secção é averiguar a flexibilidade dos alunos em transitarem de uma representação de uma função para outra.

6.2.2.1. Conversão de uma representação da função na representação tabular

Com o objetivo de averiguar de que forma é que os alunos convertem a representação verbal de uma função na sua representação tabular, analisei a questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2 (anexo II), a questão a) da entrevista (anexo III), para além dos resultados quantitativos do teste escrito.

Na questão 2 da ficha de trabalho n.º 2, é descrita uma situação de contexto real onde se relaciona a distância percorrida num táxi com o respetivo valor a pagar. Na alínea a), é pedido que os alunos construam uma tabela que represente a função descrita.

Na questão 1 a) da entrevista, pretende-se que os alunos completem uma tabela que relaciona o preço a pagar com o número de jogos de *bowling* realizados, de acordo com o descrito no enunciado.

6.2.2.1.1. Jorge e Martim

Ficha de trabalho n.º 2:

No que concerne à questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2, os alunos completam a tabela de forma incorreta, pois interpretam erroneamente o valor pago quando se percorre um quilómetro:

Jorge: Então… um quilómetro é 2,5…

Martim: E depois é sempre mais 0,5…

Como avaliam mal o valor pago no primeiro quilómetro, completam incorretamente todos os valores da tabela, recorrendo a uma estratégia aditiva que está correta de acordo com o valor obtido para um quilómetro. Os alunos denominam a primeira linha com a variável *D*. Na segunda linha, não se percebe a letra usada para designar a variável (figura 15). No entanto, como se poderá constatar mais adiante, o grupo mostra-se capaz de obter a expressão algébrica que representa a função mesmo tendo feito uma representação tabular incorreta.

D	1	2	3	4	5	10	15
[illegible]	2,5	3	3,5	4	4,5	7	9,5

Figura 15 - Resolução da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2 por Jorge e Martim

Entrevista:

Para completar a tabela que surge na entrevista, os alunos têm que determinar a imagem correspondente a alguns objetos e os objetos a que correspondem algumas imagens, havendo vários processos de resolução possíveis.

O grupo preenche facilmente os espaços em branco da tabela (figura 16). Jorge usa preferencialmente uma estratégia aditiva e Martim uma estratégia multiplicativa. Ambos os alunos são rápidos no preenchimento, como se verifica no excerto seguinte:

Jorge: 3,75 com 3,75 dá 7,5. Aqui é 10.

Martim: 4 vezes 3,75 dá 15.

Jorge: 15 mais 3,75 é 18,75 aqui é 5. E aqui é 3… 15 menos 3,75 dá 11,25.

Nº de jogos	1	2	10	4	5	3
Preço (euros)	3,75	7,50	37,50	15	18,75	11,25

Figura 16 - Resolução da questão a) da entrevista por Jorge e Martim

6.2.2.1.2. Carolina e Laura

Ficha de trabalho n.º 2:

Tal como o grupo anterior, Carolina e Laura completam incorretamente a tabela da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2 (figura 17). Também estas alunas interpretam a taxa inicial como o valor correspondente a um quilómetro e, consequentemente, completam incorretamente todos os valores da tabela, recorrendo a uma estratégia aditiva, tal como o grupo anterior. Estas alunas identificam como variável independente – "os quilómetros" – e como variável dependente – "os euros", confundindo as variáveis com as unidades em que estas são medidas.

Laura: Em cima, metemos os quilómetros e em baixo os euros…

Carolina: …então vamos lá…1, 2, 3, 4, 5, 10, 15. Para o 1 é 2,5.

Laura: Agora, é 2,5 mais… se é 0,5 por cada quilómetro… Como aumentou 1… dá 3.

Carolina: 3; 3,5; 4; 4,5; 5,… Não! Espera! Agora é…

Laura: Portanto… para 6 era 5. Para 7 era 5,5. 8 dá 6. 9 dá 6,5. 10 é 7.

quilómetros	1	2	3	4	5	10	15
€	2,5	3	3,5	4	4,5	7	9,5

Figura 17- Resolução da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2 por Carolina e Laura

Entrevista:

Para resolver a questão a) da entrevista, a Carolina e a Laura recorreram a duas estratégias distintas consoante o que pretendiam determinar fosse um objeto ou uma imagem.

As alunas preenchem de imediato o preço de um jogo interpretando bem o enunciado, e rapidamente, calculam o preço de 2 e 4 jogos, multiplicando o preço de um jogo por 2 e por 4 respetivamente (figura 18). Usam, assim, uma estratégia multiplicativa para determinarem as imagens:

Carolina: Aqui é 3,75.

Laura: Então … aqui 3 vírgula75 vezes 2…

Carolina: Dá 7 vírgula 50.

Laura: 4 vezes 3 vírgula 75…

Carolina: 15!

Professora: Escrevam, escrevam...

Em relação à determinação dos objetos desconhecidos, as alunas recorrem à regra de três simples:

Laura: Então… podemos fazer assim… 1 está para 3,75 assim como x está para 37,50.

(…)

Carolina: Dá 10.

Laura: Portanto 10. Eu acho que tá mal porque…

Carolina: Então… só pode ser…

Laura: Mas aqui está 4… não faz muito sentido…

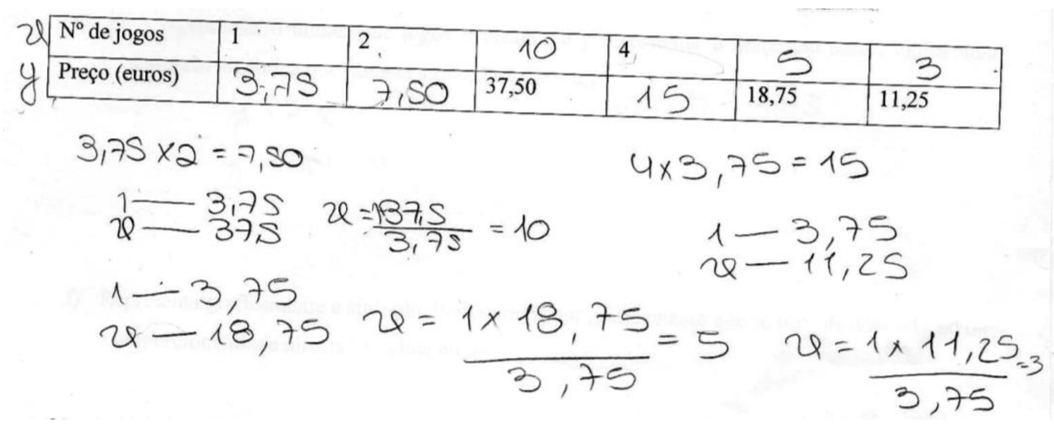
Carolina: Pois não…

Laura: Deixa não faz mal…

Carolina: Mas se o preço de um é este só pode ser 10…

Laura: O 2 está aqui o 3 ali … não deve estar por ordem.

Professora: É isso mesmo.



x	Nº de jogos	1	2	10	4	5	3
y	Preço (euros)	3,75	7,50	37,50	15	18,75	11,25

Figura 18 - Resolução da questão a) da entrevista por Carolina e Laura

Quando as alunas resolvem esta questão recorrem a regras de três simples. Neste caso, o preenchimento é correto pois o recurso a regras de três simples é legítimo (trata-se de uma situação de proporcionalidade direta). A regra de três simples parece tratar-se de uma forma de obter um valor desconhecido conhecendo três valores, mas que é desprovida de qualquer significado. Só mais tarde, na questão d) é que as alunas se apercebem que as grandezas são diretamente proporcionais.

Observe-se que as alunas demonstram uma certa perplexidade quando obtêm o objeto 10, que se encontra na tabela numa posição anterior ao 2. As alunas demonstram algum espírito crítico ao questionarem um resultado que para elas não faz sentido pois nas tabelas com que tinham trabalhado os objetos estavam ordenados. Uma mudança nesta representação em relação ao habitual causou-lhes desconfiança.

6.2.2.1.3. Nuno e Pedro

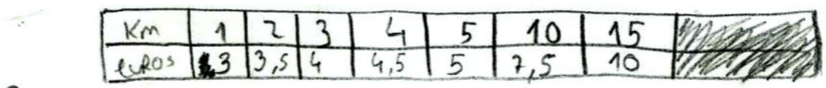
Ficha de trabalho n.º 2:

No que concerne à questão 2 da ficha de trabalho n.º 2, estes alunos são os únicos a completar de forma correta a tabela, apesar de inicialmente começarem por cometer o mesmo erro que os outros grupos.

Nuno: Em 1 dá 2,5… Em 2…

Pedro: Espera! Ele cobra quando se entra 2,5 mas depois já fez um quilómetro…

Nuno: Pois é. Pois é. Dá 3.



Km	1	2	3	4	5	10	15	
euros	3	3,5	4	4,5	5	7,5	10	

Figura 19 - Resolução da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2 por Nuno e Pedro

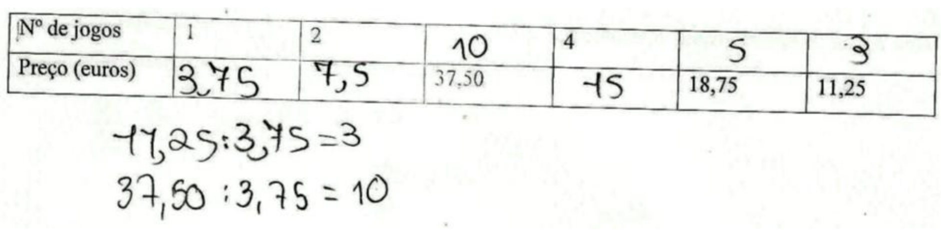
Tal como a Carolina e a Laura, também este grupo identifica as variáveis independente e dependente, respetivamente, como quilómetros e euros, confundindo, assim, as variáveis com as unidades em que são medidas.

Entrevista:

Na entrevista, o Pedro e o Nuno utilizam uma estratégia diferente dos outros grupos. Preenchem rapidamente os três primeiros espaços em branco:

Nuno: Aqui é 3,75. Aqui… 7,5. Aqui é… 10.

Os restantes valores também são calculados sem maiores dificuldades, através da divisão ou multiplicação pela constante de proporcionalidade, consoante o objetivo seja descobrir uma determinada imagem ou um determinado objeto, respetivamente (figura 20).



Nº de jogos	1	2	10	4	5	3
Preço (euros)	3,75	7,5	37,50	15	18,75	11,25

11,25:3,75=3

37,50 :3,75 = 10

Figura 20 - Resolução da questão a) da entrevista por Nuno e Pedro

6.2.2.2. Conversão de uma representação da função na representação algébrica

Tendo como objetivo averiguar de que forma é que os alunos estabelecem a conversão de uma certa representação de uma função na representação algébrica, analisei as questões 2 d) da ficha de trabalho n.º 2 (anexo II), a questão 1 a) e 1 d) da ficha de trabalho n.º 3 (anexo II) e a questão e) da entrevista (anexo III), para além dos resultados quantitativos do teste sumativo.

Na questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2, pretende-se que os alunos encontrem uma expressão algébrica de uma função afim não referente a uma situação enunciada verbalmente e representada sob a forma tabular e gráfica em alíneas anteriores.

Na questão 1 da ficha de trabalho n.º 3, são apresentadas duas funções representadas no mesmo referencial cartesiano, uma delas representando uma situação de proporcionalidade direta. Em a), é pedido que os alunos identifiquem qual das funções representa uma situação de proporcionalidade direta e que construam a respetiva expressão algébrica. Em d), pretende-se que os alunos encontrem uma expressão algébrica de uma função afim não linear enunciada sob a forma verbal e representada numa alínea anterior sob a forma gráfica.

Na alínea e) da entrevista, pede-se que os alunos escrevam uma expressão algébrica da função representada. Tendo em conta as questões anteriores, os alunos podem partir da representação verbal (enunciado), da representação tabular (determinada em a)) ou usar o facto de se tratar de uma função de proporcionalidade direta com constante igual a 3,75 (justificado em d)).

6.2.2.2.1. Jorge e Martim

Ficha de trabalho n.º 2:

Na questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2, Jorge e Martim encontram com facilidade a expressão algébrica que representa a função (figura 21), apesar de terem apresentado uma representação tabular e gráfica incorretas. Deste modo, é possível concluir que os alunos partem da representação verbal.

Contudo, os alunos usam a variável n para denominar o número de quilómetros e D para denominar o dinheiro a pagar, não estando esta notação coerente com a usada na representação tabular, isto é, na alínea 2 a).

Martim: É 2,5 mais 0,5 por cada quilómetro…

Jorge: 2,5 mais n vezes 0,5… sim… 2,5 mais n vezes 0,5.

$$D = 2,5 + n \times 0,5$$

Figura 21 - Resolução da questão 2 d) da ficha de trabalho n.º2 por Jorge e Martim

Ficha de trabalho n.º 3:

Na questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3, estes alunos apresentam uma expressão algébrica escrevendo $3t$ e não $Q = 3t$, tal como faziam na escrita dos termos gerais das sequências (figura 22). Consequentemente, os alunos mostram-se capazes de converter a representação gráfica na representação algébrica.

Note-se que inicialmente o grupo mostrou-se inseguro no uso de uma variável diferente (t) e procurou a minha validação:

Martim: É $3n$.

Jorge: Sim $3n$... ou melhor… $3t$. Podemos pôr assim?..

(os alunos chamam-me)

Jorge: Professora, podemos pôr assim $3t$?

Professora: Claro que sim. Fica mais percetível.

Figura 22 - Resolução da questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3 por Jorge e Martim

No que concerne à questão 1 e) da ficha de trabalho n.º 3 relativa a uma função afim não linear, estes alunos encontram com facilidade a expressão algébrica correspondente, mostrando compreender o significado das variáveis Q e t e compreendendo a diferença em relação à situação linear (questão 1 a)). Apesar de os alunos terem elaborado a representação gráfica desta questão em 1 d) parece-me que partem fundamentalmente da representação verbal. Também nesta questão, os alunos escrevem apenas $3t + 1{,}5$ ou invés de $Q = 3t + 1{,}5$ (figura 23).

Figura 23 - Resolução da questão 1 e) da ficha de trabalho n.º 3 por Jorge e Martim

Entrevista:

Na questão e) da entrevista, os alunos percebem perfeitamente o significado das variáveis x e y no contexto da situação descrita e encontram com naturalidade uma expressão geral que permite calcular o preço a pagar consoante o número de jogos correspondente, escrevendo agora $y = 3{,}75x$ (figura 24). Pelo que pude observar, parece que partem, predominantemente, da representação verbal, pois é a atribuição de significado às variáveis que os conduz a uma correta representação algébrica:

Jorge: É $y = 3.75x$.

Professora: Porquê?

Jorge: Porque para calcular o preço basta multiplicar o número de jogos por 3,75.

Martim: Um jogo é 3,75, 2 é 3,75 vezes dois, por aí….

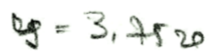


Figura 24 -Resolução da questão e) da entrevista por Jorge e Martim

6.2.2.2.2. Carolina e Laura

Ficha de trabalho n.º 2:

Na questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2, as alunas não se mostram capazes de encontrar uma expressão algébrica que represente a função, apagando a sua resolução inicial:

Carolina: expressão algébrica… x … x mais 2,5…

Laura: sim… x mais 2,5… Não. Não dá.

Carolina: Pois… 1 mais 2,5 dava 3,5 e não pode ser tem de ser 2,5…

Laura: Pois esta não dá…

O grupo ao tentar encontrar uma expressão algébrica que representa a função dá-se conta que a expressão encontrada não está de acordo com a representação tabular realizada em 2 a). Entretanto, o tempo concedido para a resolução da tarefa termina, não podendo as alunas dedicar mais tempo a esta questão.

Ficha de trabalho n.º 3:

Na questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3, as alunas mostram facilidade em encontrar a expressão algébrica da função linear cuja representação gráfica se encontra no enunciado apesar de, inicialmente, terem pensado numa expressão algébrica incorreta, isto é, na expressão $y = x + 3$ ao invés de $y = 3x$. Note-se que as alunas escrevem $3x$ e não $y = 3x$ (tal como se procedia na escrita de termos gerais de sequências – figura 25). Contudo, é possível constatar, que o grupo compreende o significado da variável usada e tem o cuidado de especificar o seu significado. Para confirmarem a sua resposta, as alunas optam por calcular as imagens de alguns objetos e confirmam graficamente os valores obtidos. No diálogo, não me parece que as alunas usem o facto de a função ser de proporcionalidade direta e por isso ter uma expressão algébrica do tipo de $y = kx$, com k é a constante de proporcionalidade direta. O ponto de partida parece ser a relação entre as coordenadas de alguns pares ordenados representados graficamente.

Carolina: … deve ser $x + 3$. Porque… Não… $3x$. Pois… Três vezes um três,…

Laura: Três vezes dois seis, três vezes três nove…

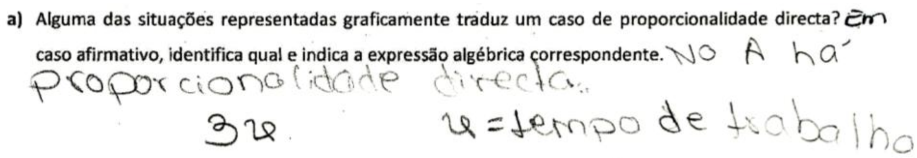
Carolina: $3x$.

Laura: Dizemos o que é que representa o x?

Carolina: eh…

Laura: x igual a tempo de trabalho.

Carolina: x igual a tempo de trabalho?... Sim.


a) Alguma das situações representadas graficamente traduz um caso de proporcionalidade directa? Em caso afirmativo, identifica qual e indica a expressão algébrica correspondente. Não há proporcionalidade directa.

$3x$. x = tempo de trabalho

Figura 25 - Resolução da questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3 por Carolina e Laura

Na questão 1 e) da ficha de trabalho n.º 3, as alunas mostram-se capazes de escrever a expressão algébrica de uma função afim não linear ao contrário do que tinha sucedido na ficha de trabalho n.º 2. Tal como na questão 1 a), o grupo escreve $3x+1{,}5$ em vez de escrever $y=3x+1{,}5$ (figura 26). Mais uma vez, para confirmarem a sua resposta, as alunas calculam as imagens correspondentes a alguns objetos e verificam esses valores na representação gráfica construída em 1 d).

Carolina: Então, por cada hora,… expressão algébrica…é

Laura: então…

Laura e Carolina: é 1,5 mais $3x$…

Carolina: sim porque 3 vezes 1 dá 3 mais 1,5 é 4,5; 3 vezes 2; 6 mais 1,5 é 7,5…

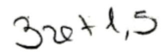

$3x+1{,}5$

Figura 26 - Resolução da questão 1 e) da ficha de trabalho n.º 3 por Carolina e Laura

Entrevista:

Na questão e) da entrevista, a Carolina e a Laura identificam de imediato que, por se tratar de uma função de proporcionalidade direta, esta tem uma expressão geral do tipo $y=kx$. No entanto, só concretizam o valor de k na expressão geral quando alertadas para isso, apesar de conhecerem o seu significado, como se pode observar no diálogo com a professora:

Laura: Então… é $y=kx$.

Professora: $y=kx$?

Carolina: Sim, $y=kx$… acho eu.

Professora: E fica só assim? Não percebo. O que é o k?

Laura: É a constante de proporcionalidade. É… 3,75.

Professora: Fica então…

Carolina: $y = 3{,}75x$.

Professora: E o que é o x e o y?

Laura: O x é… o preço… não! Não! É o número de jogos e o y é o preço!

Professora: Porquê?

Laura: Porque… aqui… (aponta para a tabela) se fizermos 3,75 vezes o número de jogos obtemos o preço.

As alunas demonstram perceber qual o significado das variáveis x e y. Apesar de usarem a expressão geral das funções de proporcionalidade direta, as alunas estabelecem uma conexão com a representação tabular. Note-se que na entrevista as alunas já escrevem $y = 3{,}75x$ e não apenas $3{,}75x$ (figura 27).

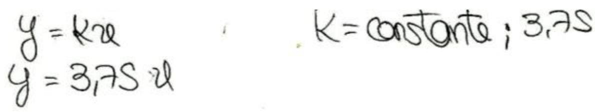


Figura 27 - Resolução da questão 1 e) da entrevista por Carolina e Laura

6.2.2.2.3. Nuno e Pedro

Ficha de trabalho n.º 2:

Na questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2, os alunos mostram compreender como calcular o preço a pagar de acordo com o número de quilómetros percorrido. Na escrita da expressão algébrica, o grupo não usa uma notação correta pois toma para variável independente a unidade em que esta é medida. Note-se que, tal como os restantes grupos, estes alunos também escrevem apenas $2{,}5 + km \times 0{,}5$ (figura 28).

Pedro: Então... É o número de quilómetros vezes 0,5 mais 2,5.

Figura 28 - Resolução da questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2 por Nuno e Pedro

Ficha de trabalho n.º 3:

Na questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3, este grupo estabelece a representação tabular das duas funções em vez de construir a representação algébrica da função linear (figura 29). Não se percebe se foi por esquecimento ou se foi por confundirem as duas representações. Contudo, verifica-se que estes alunos precisam de elaborar a representação tabular das funções representadas graficamente para poderem concluir qual delas corresponderia a uma função de proporcionalidade direta. Por outras palavras, mostram não conhecer que os pontos do gráfico de uma função de proporcionalidade direta devem estar sobre uma reta que passa na origem.

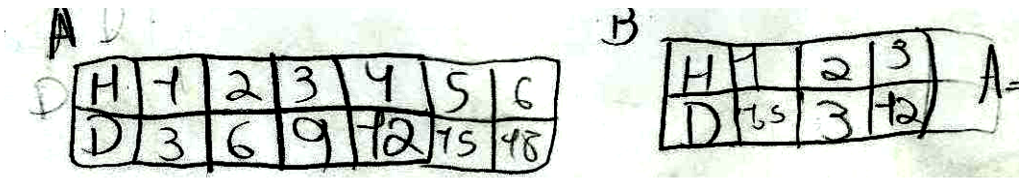


Figura 29 - Resolução da questão 1 a) da ficha de trabalho 3 por Nuno e Pedro

Este grupo não teve tempo para resolver a questão 1 d) da ficha de trabalho n.º 3.

Entrevista:

Na questão e) da entrevista, os alunos Pedro e Nuno demonstram muita dificuldade em escrever a expressão algébrica. Em primeiro lugar, os alunos mostram não compreender o que é uma expressão algébrica:

Nuno e Pedro: (com um ar pensativo) Expressão algébrica…

Pedro: Foi…. Foi aquilo que fizemos aqui (aponta para a alínea anterior) …

Nuno: Eu errei essa (referindo-se ao teste escrito).

Pedro: Foi… Foi o preço a dividir pelo número de jogos.

Professora: Então o preço a…

Pedro: Não, não primeiro temos que descobrir o preço.

De seguida, usando a justificação apresentada na alínea anterior (onde o grupo verificou a invariância do quociente entre o preço e número de jogos realizados), Nuno tenta escrever uma expressão simbólica mas não reflete no significado atribuído às variáveis x e y:

Nuno: (começa a escrever e a dizer em voz alta) x a dividir por y…

Professora: Vejam lá… o que fizeram aqui em cima… foi x por y ou y por x?

Nuno: (com ar pensativo) Foi y por x!

(o aluno escreve y/x)

Professora: O que é afinal o x? E o y?

Nuno: Então o x é o número de jogos e o y é o preço.

Ora, mesmo depois de enunciar o papel desempenhado pelas variáveis, Nuno não mobiliza esse conhecimento na compreensão do quociente entre y e x. Os alunos têm dificuldade em escrever $y/x = 3{,}75$, ou seja, mostram dificuldades em traduzir para linguagem simbólica a invariância do quociente. O principal motivo prende-se, a meu ver, com o facto de não invocarem o significado das variáveis e de lidarem com elas como entidades abstratas. Sem qualquer significado, seria de esperar que y/x não fosse uma constante mas também uma variável:

Professora: E isso dá quanto?

Nuno: Dá x… Não! Dá y…

Professora: Não… y a dividir por x quanto é que vos deu aqui sempre… Sempre?

Nuno: Deu-me o x… Ehhhh… Deu-me a constante!

(Nuno escreve na folha y/x dá sempre 3,75)

Professora: E se dá sempre 3,75 como podemos escrever isso em linguagem simbólica?

(Silêncio)

Professora: Se uma coisa dá sempre outra podemos dizer…

(Silêncio)

Professora: Que é igual… $y/x = 3{,}75$. Sim?

Nuno: Sim…

(A professora escreve na folha de registo dos alunos $y/x = 3{,}75$)

Os alunos não manifestam dificuldades significativas em passar da expressão algébrica $y/x = 3{,}75$ para uma expressão algébrica equivalente $y = 3{,}75x$ (mudança de representação dentro do mesmo registo), porém, só o fazem quando lhes é pedido para agirem como se estivessem a resolver uma equação (figura 30). Os alunos não identificam qual a expressão geral de funções de proporcionalidade direta:

Professora: E agora… uma forma mais "bonitinha" de escrever isso?

(Os alunos em silêncio, esboçando sorridos, visivelmente constrangidos)

Professora: Esta é uma função de proporcionalidade direta. Certo?

Nuno e Pedro: Certo!

Professora: E não tínhamos uma forma geral para as expressões algébricas destas funções?

Pedro: …. Não me estou a lembrar…

Professora: Então… vamos pensar que isto é uma equação. O que podemos fazer para isolar o y?

Nuno: Passamos com sinal contrário.

Professora: E o x está a fazer o quê?

Nuno: Está a dividir.

Professora: Então

Nuno: Passamos para o outro lado a multiplicar.

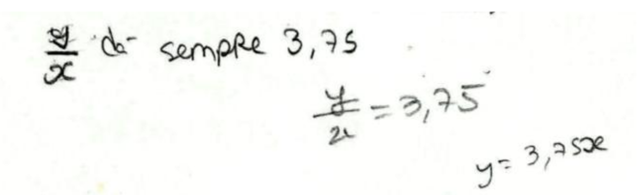


Figura 30 - Resolução da questão 1e) da entrevista por Nuno e Pedro

6.2.2.3. Conversão de uma representação da função na representação gráfica

Note-se que antes do início da unidade didática os alunos já tinham trabalhado na identificação de pontos num referencial cartesiano no plano. Consequentemente, já estavam familiarizados com a terminologia relativa à representação de pontos: coordenadas, abcissa, ordenada, eixo das abcissas e eixo das ordenadas.

Para averiguar a flexibilidade dos alunos na conversão de uma representação de uma função na representação gráfica, optei por analisar as questões 2 c) da ficha de trabalho n.º 2 (anexo II) e f) da entrevista (anexo III).

Na questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2, pretende-se que os alunos representem graficamente uma função afim não linear apresentada verbalmente (no enunciado) e representada por uma tabela (2 a)).

Na questão f) pede-se que os alunos representem graficamente uma função de proporcionalidade direta e indiquem como deve ser o gráfico de uma função desse tipo. Nesta alínea, os alunos podem recorrer a diferentes estratégias:

- Usar a informação dada no enunciado (representação verbal);
- Usar os valores da tabela preenchida em a) (representação tabular);
- Usar a expressão algébrica, construída em e) (representação algébrica).

6.2.2.3.1. Jorge e Martim

Ficha de trabalho n.º 2:

Na questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2, os alunos não mostram dificuldade em marcar os pares ordenados encontrados na tabela de uma alínea anterior, embora cometam algumas incorreções. Identificam corretamente os eixos onde devem representar os valores das variáveis mas não utilizam uma escala correta no eixo das ordenadas. Tendo em conta esta falta de rigor, a representação gráfica induz em erro pois os pontos do gráfico parecem estar sobre uma reta que passa na origem, característico de uma função linear, que não é o caso deste exemplo.

Na representação gráfica (figura 31), os alunos apenas representam o primeiro quadrante onde as variáveis em causa fazem sentido, representam as linhas auxiliares por um traço contínuo quando deveria ser a tracejado mas têm o cuidado de indicar a orientação dos eixos e de identificar as unidades em que são medidas cada uma das variáveis. Na identificação dos eixos, os alunos apenas fazem uma identificação genérica não utilizando as variáveis que utilizaram na representação tabular nem na representação algébrica. Os alunos não unem os pontos representados o que é coerente com os valores do domínio que se encontram na representação tabular realizada em 2 a).

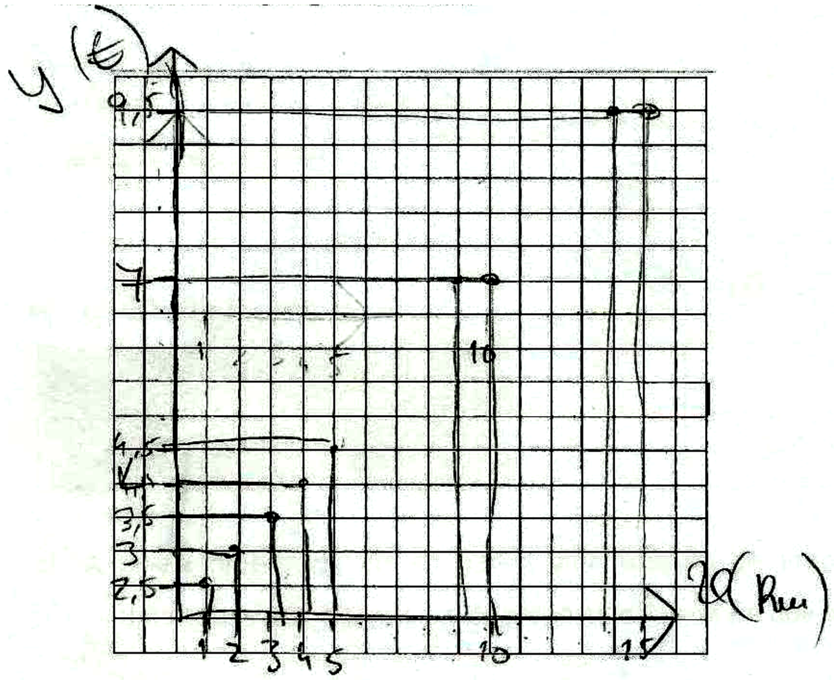


Figura 31 - Resolução da questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2 por Jorge e Martim

Entrevista:

Na entrevista, estes alunos não tiveram dificuldades em representar o gráfico mas continuam a mostrar falta de rigor. Os alunos não representam os eixos coordenados, usando para o efeito o quadriculado apresentado na fotocópia. Estabelecem de forma correta, a correspondência entre eixos e as respetivas variáveis, apesar de fazerem apenas uma identificação genérica dos eixos coordenados e de não indicarem a orientação dos eixos. Deste modo, acabam por não prolongar os eixos coordenados para os quadrantes que não fazem sentido no contexto do problema. Usam a constante de proporcionalidade como “unidade” no eixo das ordenadas mas não criam uma escala correta em nenhum dos eixos. Os alunos marcam primeiro as coordenadas do ponto $(1; 3{,}75)$ e marcam os restantes pontos tendo em conta que estes devem estar sobre uma linha reta que passa nesse ponto e na origem do referencial visto tratar-se de uma situação de proporcionalidade direta:

Jorge: Agora os outros pontos estão todos aqui….

Ao tentarem resolver o exercício com rapidez, os alunos marcam erradamente a posição da abcissa 5. Este grupo é o único que marca a origem como ponto pertencente ao gráfico, sem intervenção da minha parte. Os alunos justificam adequadamente por que se trata de um gráfico representativo de uma função de proporcionalidade direta, como se pode observar na figura 32.

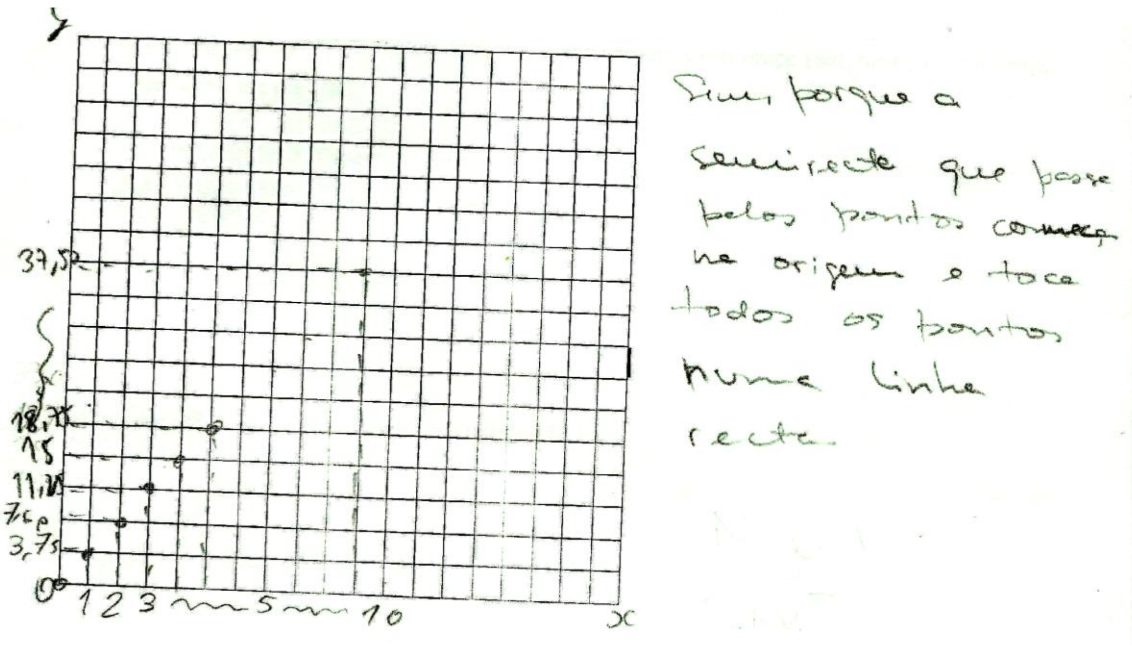


Figura 32 - Resolução da questão f) da entrevista por Jorge e Martim

6.2.2.3.2. Carolina e a Laura

Ficha de trabalho n.º 2:

Em relação à representação gráfica (figura 33), as alunas identificam corretamente os eixos onde devem representar os valores das variáveis embora não os identifiquem. De seguida, marcam os pares ordenados encontrados na representação tabular (2 a)). Não mostram dificuldade na escolha da escala, representam apenas o quadrante resultante do cruzamento dos semieixos positivos prolongando-os e conferindo-lhes uma orientação. Após a marcação dos pontos, as alunas constroem a semirreta que os une com origem no ponto de coordenadas $(1;2,5)$, dizendo que "também se pode andar uma hora e meia". Contudo, não representam o gráfico no intervalo $]0,1]$.

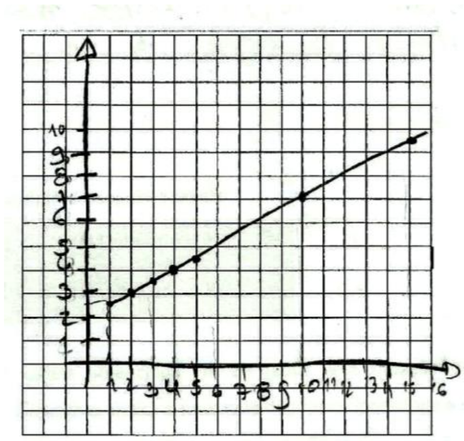


Figura 33 - Resolução da questão 2 d) da ficha de trabalho n.º 2 por Carolina e Laura

Entrevista:

Na entrevista, as alunas começam por identificar corretamente as variáveis dependente e independente, identificando o eixo das abcissas como o "Número de jogos" e o eixo das ordenadas como o "Preço". Todavia, ao registarem os valores das variáveis, colocam no eixo das ordenadas os valores referentes ao "Número de jogos" e no eixo das abcissas os valores referentes ao "Preço". Instantes depois, as alunas dão-se conta desse erro:

Carolina: Espera lá…. Acho que estamos a trocar isto…

Laura: Trocar como?

Carolina: (apontando) Aqui devíamos colocar os preços… o 1,2,3,4 deviam de estar aqui…

Laura: Pois é!

Após esta confusão, as alunas terminam a representação gráfica (figura 34) sem maiores problemas, utilizando com facilidade uma escala apropriada à situação, usando a constante de proporcionalidade como "unidade" no eixo das ordenadas. Para isto as alunas recorrem à representação tabular feita em a).

Carolina: Aqui é o 3,75…

Laura: 2 dá 7 e meio, 3 dá 11 vírgula 25.

Laura: Quatro?

Carolina: Dá 15 e o 5 dá 18, 75

As alunas representam apenas o quadrante que faz sentido no contexto do problema, mas têm o cuidado de prolongar os eixos para os restantes quadrantes. As alunas têm o cuidado de indicar a orientação dos eixos e de identificar os eixos. O grupo não tem dúvidas de que os pontos não se devem unir pois não há "meios jogos", porém não marca a origem como ponto pertencente ao gráfico. Quando questionadas sobre a adequação deste gráfico à situação de proporcionalidade direta, as alunas respondem de imediato e corretamente:

Laura: Porque é uma reta que passa na origem.

Professora: Passa na origem? Não vejo lá nada marcado.

Carolina: Pois… Mas se não há jogos não há dinheiro.

Professora: Então têm de marcar esse ponto. E isto é uma reta?

Laura: Não…. Mas se uníssemos estava numa reta.

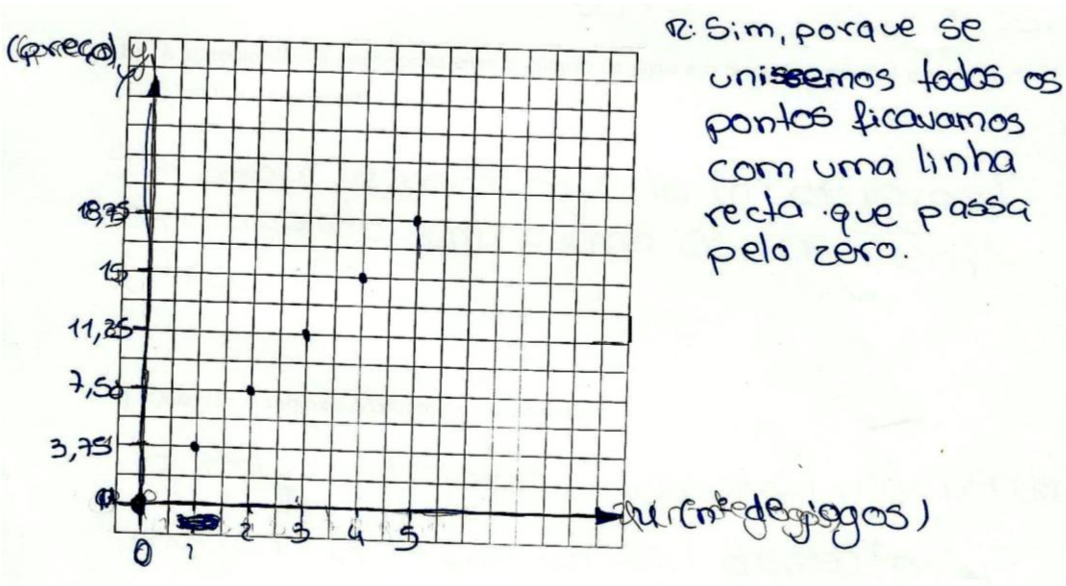


Figura 34 - Resolução da questão f) da entrevista por Carolina e Laura

6.2.2.3.3. Nuno e Pedro

Ficha de trabalho n.º 2:

Tendo por base a tabela elaborada em 2 a), os alunos não têm dificuldade em representar graficamente esta informação (figura 35), utilizando para o efeito o sistema de eixos coordenados e uma escala que se adapta à situação. Reconhecem qual é a variável dependente e a independente, apesar de identificarem os eixos coordenados com as unidades em que estas variáveis são medidas. Os alunos representam unicamente o quadrante onde as variáveis assumem valores positivos, indicando que as retas se prolongam indefinidamente nos dois sentidos. No entanto, não indicam a orientação dos eixos e representam as linhas auxiliares por um traço contínuo quando deveria ser a tracejado. Os alunos não unem os pontos representados assumindo que o número de quilómetros percorrido só pode ser um número inteiro sendo coerentes com o domínio da representação tabular elaborada em 2 a).

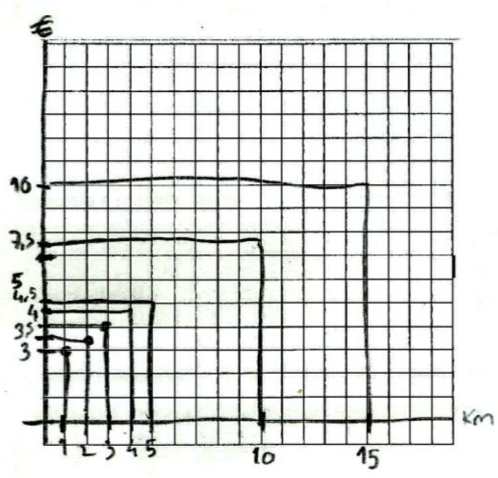


Figura 35 - Resolução da questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2 por Nuno e Pedro

Entrevista:

Os alunos não mostram dificuldades em representar graficamente a informação contida na tabela (figura 36), utilizando para o efeito o sistema de eixos coordenados. Identificam corretamente as variáveis dependente e independente, apesar de só fazerem uma identificação genérica dos eixos coordenados. Utilizando a constante de proporcionalidade como "unidade" no eixo das ordenadas, os alunos marcam os pontos resultantes do preenchimento da tabela (feita em a)) onde constam o número de jogos e o respetivo preço.

Os alunos representam apenas o quadrante onde as variáveis assumem valores positivos, tendo o cuidado de prolongar os eixos para os restantes quadrantes. No entanto, a representação gráfica apresenta algumas incorreções. Representam as linhas auxiliares por um traço contínuo quando esta deveria ser a tracejado e apenas orientam os eixos quando alertados para isso. E tal como o grupo da Laura e da Carolina, estes alunos inicialmente não marcam o ponto de coordenadas $(0,0)$ como pertencente ao gráfico.

Professora: Não há setas não há nada nesse referencial…

Nuno: Ah!

Professora: O zero… Quanto é que pago no zero?

Nuno e Pedro: Zero!

Professora: Vamos por então uma bolinha no zero. Os pontos unem-se ou não?

Nuno: (após uns instantes de silêncio) Não se unem porque não se pode fazer meio jogo.

Quando questionados sobre a razão pela qual este gráfico retrata uma função de proporcionalidade direta, os alunos mostram não conhecer que os pontos do gráfico de uma função de proporcionalidade direta devem pertencer a uma reta que passa pela origem. Porém, os alunos mostram perceber que o quociente entre os valores correspondentes do eixo das ordenadas pelo eixo das abcissas terá de ser invariante e igual à constante de proporcionalidade:

Pedro (apontando): Sim… porque este a dividir por este vai dar sempre 3,75.

Professora: Pode ser… e o aspeto do gráfico, sem fazer contas?

Nuno: A linha é reta.

Professora: Os pontos estão sobre uma linha reta. Sim. Mas uma reta especial…

Nuno: Especial?

Professora: Sim. Especial… A reta passa por onde?

Pedro: Por todos os pontos.

Professora: Sim mas qual é o ponto pelo qual tem sempre de passar em todos os gráficos de proporcionalidade direta?

Nuno: Pelo um?

Professora: Qual é o ponto um?

(Nuno vai apontar para o gráfico mas arrepende-se).

Professora: Não percebo o que é o ponto um? Aqui temos duas variáveis, o que é o um?

Nuno: O x….

Professora: hum?

Nuno: Não…. (rindo-se constrangido).

Professora: Numa situação de proporcionalidade direta, ao zero vai sempre corresponder …

Nuno: O zero.

Professora: O zero sempre. Portanto tem de ser uma reta que passa pela origem.

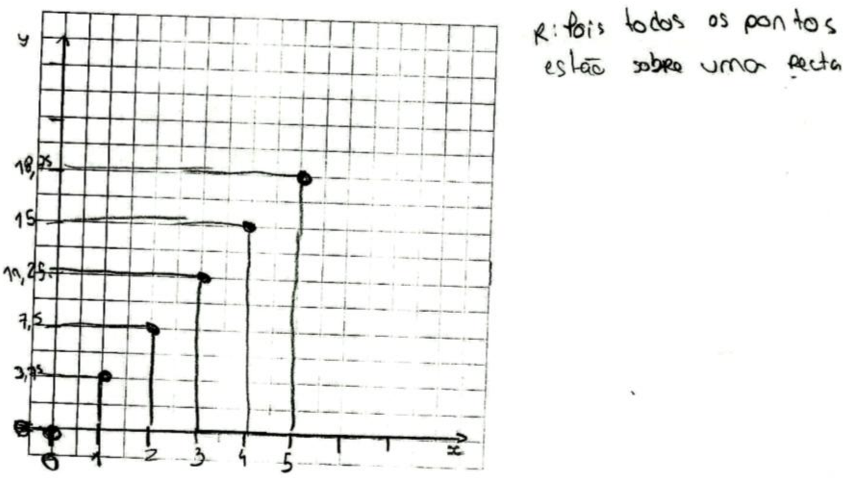


Figura 36 - Resolução da questão f) da entrevista por Nuno e Pedro

6.3. Teste escrito

No final do ano letivo, os alunos foram sujeitos a um teste escrito (anexo IV) que pretendia avaliar o seu conhecimento nos conteúdos lecionados durante esse ano. Tendo em conta que este estudo é sobre a unidade didática das Funções, foco-me apenas nas questões relativas a esta unidade. Esta análise é feita apenas sob ponto de vista quantitativo, contemplando a prestação global da turma e particularizando para a prestação dos alunos que fizeram parte dos estudos de casos.

Questão 1:

Esta questão visa averiguar o entendimento que os alunos têm da noção de função. São apresentadas correspondências sob a forma de diagrama sagital, de tabela e de gráfico cartesiano e pede-se que os alunos identifiquem quais representam funções. Pretende avaliar-se o conhecimento da turma em relação ao conceito de função tendo por base diferentes representações. Nesta questão, 23 alunos responderam corretamente e dois responderam incorretamente (entre eles o aluno Pedro).

Questão 2.1:

Nesta tabela está apresentada uma correspondência entre duas variáveis. Pede-se que os alunos identifiquem essa correspondência como função e justifiquem adequadamente. Observou-se que 13 alunos obtiveram a cotação total (entre eles, os alunos Nuno, Carolina, Laura, Jorge e Martim), nove alunos tiveram cotação parcial, destes sete alunos apresentaram uma justificação adequada mas genérica e dois não apresentaram uma justificação adequada (entre os quais o Pedro). Apenas três alunos da turma tiveram cotação zero pois não reconheceram que se tratava de uma função.

Questão 2 2:

Nesta questão, é solicitado que os alunos identifiquem o domínio e o contradomínio da função (representada na forma tabular). Aqui, oito alunos tiveram a cotação total (entre os quais a Carolina, a Laura, o Martim e o Jorge), o Pedro teve cotação parcial pois cometeu um erro de notação e 16 alunos tiveram cotação zero (entre os quais o Nuno).

Questão 2 3:

Nesta alínea, pede-se que os alunos indiquem a imagem de um determinado objeto e o objeto que origina determinada imagem. Apenas um aluno na turma não respondeu corretamente (que não fez parte de nenhum estudo de caso).

Questão 3 1:

Pretende-se aqui que os alunos façam uma interpretação adequada do enunciado e consigam converter esta informação (que está representada verbalmente) na representação tabular. Todos os alunos tiveram cotação total.

Questão 3 2:

Nesta questão, pede-se que os alunos identifiquem as variáveis independente e dependente. Constatou-se que 20 alunos tiveram cotação total (entre eles, a Carolina, a Laura, o Martim e o Jorge) enquanto cinco trocaram as variáveis (entre eles, o Pedro e o Nuno).

Questão 3 3:

Pretende-se que os alunos consigam escrever a expressão algébrica da função representada verbalmente ou tabularmente. Observou-se que 15 alunos tiveram a cotação total (entre eles, a Carolina, o Jorge, o Martim), quatro alunos tiveram cotação parcial pois apenas substituíram o espaço em branco pela letra k (entre eles, a Laura) e seis alunos tiveram cotação zero (entre eles, o Pedro e o Nuno).

Apresente abaixo um quadro com uma síntese dos resultados obtidos no teste.

Quadro 3 - Resultados do teste sumativo

Questão	**Número de respostas com cotação total**	**Número de respostas com cotação parcial**	**Número de respostas com cotação zero**
1	23	-	2 (Pedro)
2 1	13	9	3 (Pedro)
2 2	8 (Carolina, Laura, Martim e Jorge)	1 (Pedro)	16 (Nuno)
2 3	24		1
3 1	25	0	0
3 2	20	-	5 (Pedro e Nuno)
3 3	15 (Carolina, Jorge e Martim)	4 (Laura)	6 (Pedro e Nuno)

7. Conclusão / Reflexão

Neste capítulo, procuro dar resposta às questões inicialmente formuladas, tendo em conta a análise de dados efetuada e a literatura consultada.

De seguida, faço uma reflexão crítica do meu desempenho ao longo da unidade de ensino, salientando aspetos positivos e aspetos menos conseguidos e as aprendizagens que fiz enquanto docente.

7.1. As questões do estudo

Para responder às questões que se seguem, usei as tarefas analisadas no capítulo anterior e os resultados quantitativos do teste sumativo.

- **Como se caracteriza a noção de função evidenciada pelos alunos na unidade didática das Funções?**

O conceito de função é abstrato e só pode ser verdadeiramente apreendido coordenando todas as representações (Duval,1999, 2004, 2006; Tripathy, 2008). Assim, ao analisar-se a compreensão deste conceito não podemos fazê-lo independentemente da representação usada.

Tanto na ficha de trabalho como na entrevista e no teste escrito, os alunos Jorge e Martim demonstram ser capazes de distinguir correspondências que são funções das que não o são (independentemente da representação usada), apresentam sempre uma justificação adaptada ao contexto. Identificam corretamente as variáveis independente e dependente na entrevista e no teste escrito. No teste escrito, os dois alunos indicam o domínio e o contradomínio, usando notação adequada. Além disso, ambos os alunos calculam corretamente, no teste escrito, objetos correspondentes a determinadas imagens e imagens correspondentes a determinados objetos, mostrando compreender o significado da notação " $f(x)=$ ".

Durante a lecionação da unidade didática, as alunas Laura e Carolina mostram dificuldades na noção de função devido a uma má interpretação das variáveis em causa, confundindo a noção de função com a noção de função injetiva. Contudo, no final da unidade didática, as alunas demostram ter adquirido um bom entendimento do conceito de função. Na entrevista, as alunas usam uma justificação adequada ao contexto embora tenham de ser alertadas para isso. No teste escrito, ambas distinguem correspondências que são funções das que não o são, quer sejam representadas verbalmente, tabularmente, graficamente ou sob a forma de diagrama sagital. Ambas as alunas mostram-se capazes de indicar o domínio e o contradomínio, utilizando a notação apropriada, de identificar corretamente as variáveis dependente e independente e de determinar objetos e imagens adequadamente.

Os alunos Nuno e Pedro mostram algumas dificuldades na aquisição apropriação do conceito de função. Durante a lecionação da unidade didática, os alunos mostram não se recordar da definição de função. Ao serem auxiliados, os alunos parecem compreender a correspondência em causa e quais são as variáveis independente e dependente. Contudo, será esta compreensão realmente efetiva ou tratar-se-á de uma mera memorização? Na entrevista, Nuno hesita na escolha das variáveis independente e dependente e erra na sua identificação no teste escrito (questão 3.2.). Porém, noutras questões mostra-se capaz de distinguir correspondências que são funções das que não o são (na entrevista), de identificar o domínio e o contradomínio (questão 2.2 do teste escrito) e de completar corretamente expressões do tipo $f(a)=b$ (questão 2.3 do teste escrito). O aluno Pedro identifica uma função constante representada por um diagrama sagital como uma "não função" (questão 1 do teste escrito), confundindo, o conceito de função com o de função injetiva, erro frequente como se retrata em Domingos (1994). Na questão 2.1. do teste escrito, Pedro embora identifique a tabela como sendo uma função não apresenta uma justificação adequada trocando a variável independente com a dependente, tal como faz na questão 3.2. mas contradiz-se identificando corretamente o domínio e o contradomínio (embora cometendo erros de notação). O aluno revela-se capaz de completar expressões do tipo $f(a)=b$.

Em conclusão, no final da unidade didática, o conceito de função parece ter sido bem apreendido pelo Jorge, Martim, Carolina e Laura. Porém, em relação aos alunos Pedro e Nuno não podemos afirmar o mesmo. O Pedro não se revela capaz de distinguir o que é uma função e confunde as variáveis dependente e independente, erro também cometido pelo seu colega de grupo, Nuno.

Deste modo, podemos afirmar que os maiores problemas sentidos pelos alunos foram: dificuldade em identificar as variáveis dependente e independente e confusão entre a definição de função e de função injetiva dificuldades também relatadas por diversos autores como Candeias (2010), Domingos (1994), Ponte (1984) e Sajka (2003).

Como referi, o conceito de função foi introduzido com base no trabalho com padrões e regularidades, aconselhado por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), Driscoll (1999), Matos (2007), NCTM (2008) e Oliveira (2009). Verificou-se que todos os grupos (durante a lecionação da unidade didática) escreviam as expressões algébricas no formato $kx+b$ (com $k,b\in\Re$) e não $y=kx+b$ (com $k,b\in\Re$), facto possivelmente explicado pelo trabalho anterior com sequências. Além disso, habituados a utilizar a variável n na escrita de expressões geradoras de sequências, os alunos (por exemplo, Jorge e Martim na questão 2 d) da ficha de trabalho nº. 2) tendem inicialmente a usar a mesma variável, mesmo quando o domínio não é restrito aos números naturais. Considero por isso que a exploração de sequências revelou-se favorável à escrita de expressões algébricas bem como na compreensão da noção de dependência e na identificação das variáveis dependente e independente.

A par desta introdução com base em sequências, houve também o cuidado de trabalhar com diferentes representações de funções. Autores como Duval (2004, 2006) e Tripathy (2008) referem que cada uma das representações transmite informações específicas mas nenhuma consegue descrever completamente o objeto função. Assim, a apreensão do conceito só é possível quando se coordenam as diferentes representações. Considero que este processo foi útil pois dois dos três grupos analisados mostraram compreender o conceito de função independentemente da representação usada.

- **Que flexibilidade demonstram os alunos na conversão de diferentes representações (verbal, gráfica, tabular e algébrica) de uma função?**

Conversão da representação de uma função na representação tabular

Na ficha de trabalho n.º 2, apenas os alunos Nuno e Pedro foram capazes de interpretar corretamente a informação fornecida verbalmente. Para construir a representação tabular desta função afim não linear, todos os grupos recorrem a uma estratégia aditiva. Os outros dois grupos interpretam erradamente a primeira entrada da tabela o que faz com que as restantes entradas estejam incorretas. Os grupos da Laura e da Carolina e do Nuno e do Pedro identificam as variáveis com as unidades em que estas são medidas.

Na entrevista, Jorge e Martim demonstram compreender a situação representada verbalmente convertendo-a com facilidade na representação tabular, usando uma estratégia preferencialmente aditiva pois somam as coordenadas de dois pontos já calculados para determinar as coordenadas de um terceiro ponto.

Nessa mesma questão a Laura e a Carolina recorrem à utilização da regra de três simples e a processos baseados na multiplicação pela constante de proporcionalidade. Para estas alunas, a determinação das imagens é mais intuitiva e a operação a realizar surge-lhes naturalmente. Para a determinação dos objetos, as alunas não percebem que têm de fazer o processo inverso, isto é, dividir pela constante de proporcionalidade. Consequentemente, recorrem à regra de três simples como um processo que permite calcular qualquer valor desconhecido.

Nessa mesma questão, Nuno e Pedro compreendem o que está em jogo no contexto da situação e calculam os espaços em branco na tabela, através da divisão ou da multiplicação pela constante de proporcionalidade.

Todos os alunos do estudo resolveram corretamente a questão 3.1. do teste escrito demonstrando assim facilidade em mudar da representação verbal para a representação tabular bem como interpretar informação dada verbalmente. Assim, embora tenham ocorrido incorreções na representação tabular de uma função afim não linear, considero que os três pares de alunos mostraram relativa facilidade em interpretar informação dada verbalmente e flexibilidade em passar para a representação tabular embora usem, por vezes, estratégias diferentes. Note-se que todas estas estratégias já tinham sido observadas nos estudos de Bolota (2011), Candeias (2010) e Guerreiro (2009).

Conversão de uma representação da função na representação algébrica

Ao longo de toda a unidade didática, os alunos Jorge e Martim mostram grande intuição na escrita de expressões algébricas, quer sejam de funções afins lineares quer sejam de funções afins não lineares. Os alunos compreendem o significado das variáveis em causa, estabelecem a relação entre elas e escrevem, sem dificuldades a expressão algébrica correspondente. Todo este processo decorre com muita naturalidade, tendo os alunos o cuidado de usar a variável t quando se referem ao tempo e a variável n quando o domínio é restrito aos números naturais. Ao construírem a expressão algébrica da ficha de trabalho n.º 2, pode constatar-se que partem fundamentalmente da representação verbal tendo em conta que a representação tabular e gráfica estão incorretas. Na questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3, os alunos passam da representação gráfica para a representação algébrica sem passarem por nenhuma representação intermédia (a menos que o façam implicitamente). Na questão 1 e) da ficha de trabalho n.º 3, os alunos podem ter partido da representação gráfica ou da representação verbal embora possa considerar que pela naturalidade com que este processo decorreu a representação verbal terá sido o principal ponto de partida. Na entrevista, os alunos podem também ter partido da representação verbal ou tabular. No entanto, pela resolução observada a ideia que transparece é que a representação verbal terá sido a eleita. No teste escrito, ambos completam convenientemente a expressão $y = \_\, x$.

As alunas Carolina e Laura mostram uma evolução na facilidade com que constróiem expressões algébricas. Enquanto na ficha de trabalho n.º 2, as alunas não se mostram capazes de construir uma expressão algébrica relativa a uma função não linear, na ficha de trabalho n.º 3, encontram expressões algébricas de funções lineares e não lineares com facilidade pois interpretam adequadamente as variáveis e a correspondência descrita. Na questão 1 a) da ficha de trabalho n.º 3, as alunas partem da representação gráfica. Na questão 1 e) dessa mesma ficha, as alunas partem fundamentalmente da representação verbal mas usam a representação gráfica para confirmarem as coordenadas de alguns pontos obtidos. Na entrevista, ao determinar a expressão algébrica que representa a situação descrita, Carolina e a Laura começam por encontrar a constante de proporcionalidade. A identificação desta constante permite-lhes encontrar corretamente a expressão algébrica da função. As alunas mostram saber que a expressão algébrica que representa uma situação de proporcionalidade direta é dada por $y = kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade. É a identificação da constante de proporcionalidade que lhes permite fazer a representação algébrica da função. Contudo, as alunas só substituem k pela constante em questão quando chamadas à atenção. Como não refletiram no significado das variáveis no contexto da situação descrita, as alunas recorrem ao um procedimento automatizado que não produz os bons resultados que obtiveram na ficha de trabalho n.º 3. No teste escrito, Carolina completa corretamente a expressão $y = \_\, x$, enquanto Laura completa o espaço em branco com a letra k, não substituindo k pela constante em questão. Pode-se, assim, verificar que o desempenho das alunas é melhor quando compreendem o significado das variáveis em jogo e interpretam adequadamente a situação ao invés de partirem para procedimentos automatizados.

Relativamente ao grupo do Pedro e do Nuno, este só se mostra capaz de contruir uma expressão algébrica na ficha de trabalho n.º 2 pois faz uma interpretação adequada da situação apresentada compreendendo o significado das variáveis em jogo embora confunda as variáveis com as unidades em que estas são medidas. Na entrevista, os alunos mesmo mostrando compreender o significado das variáveis em questão não são capazes de mobilizar esse conhecimento para a escrita da expressão algébrica. Embora compreendam que o quociente entre o valor da variável dependente e a variável independente correspondente é invariante, os alunos não conseguem traduzir esta relação em linguagem simbólica. Mostram também dificuldade na manipulação de expressões que envolvam variáveis. A par disso, os alunos revelam também desconhecer que uma função de proporcionalidade direta é dada por uma função cuja expressão geral é da forma

$y = kx$, (com k não nulo) onde k representa a constante de proporcionalidade. No teste escrito, estes dois alunos não completam corretamente a expressão $y = \_\, x$.

Note-se que todos os grupos durante a unidade didática usam expressões do tipo $kx + b$(com $k, b \in \Re$) enquanto no final da unidade usam expressões do tipo $y = kx + b$ (com $k, b \in \Re$). Depreendo que os alunos têm mais sucesso na escrita de expressões algébricas quando fazem uma boa interpretação da representação verbal da função, atribuindo significado às variáveis e mobilizando-o. Deste modo, pode constatar-se que o uso exclusivo da linguagem algébrica pode ocultar o significado das variáveis representadas, como referido por Friedlander e Tabach (2001). Estas dificuldades em lidar com linguagem simbólica e generalizar constam também dos trabalhos de Candeias (2010), Duval (2004, 2006), Guerreiro (2009), Kaput (1999) e Matos (2007).

Conversão de uma representação da função na representação gráfica

Ao elaborarem a representação gráfica, Jorge e Martim identificam com facilidade os eixos onde devem representar os valores das variáveis mas as suas representações gráficas apresentam, com frequência, falta de rigor. Por vezes, a escala não está correta, não são apresentados os eixos, alguns pontos são mal marcados, os eixos não são orientados nem identificados, as linhas auxiliares são feitas por um traço contínuo quando deveria ser a tracejado. No que diz respeito à identificação de funções de proporcionalidade direta, os alunos referem que, para se tratar de uma função desta natureza, é necessário que os pontos estejam representados sobre uma linha reta que passa pela origem do referencial. Consequentemente, conseguem estabelecer uma relação entre a representação gráfica e a expressão algébrica correspondente de uma função linear.

Laura e Carolina nem sempre identificam corretamente os eixos onde devem representar os valores das variáveis. No entanto, quando confrontadas com o erro, corrigem-no e constroem a representação gráfica da função com facilidade, não mostrando dificuldades na escolha da escala e tendo o cuidado de apresentar a orientação dos eixos apesar de nem sempre os identificarem. Nas representações gráficas, as alunas usam os pares ordenados encontrados nas respetivas representações tabulares. O grupo tem o cuidado de refletir sobre se devem ou não unir os pontos marcados no gráfico. Quando questionadas sobre o que esperam obter da representação gráfica de uma situação de proporcionalidade direta, afirmam que os pontos têm de pertencer a uma reta que passa pela origem do referencial, mostrando conhecer a representação gráfica de uma função de proporcionalidade direta.

No que diz concerne à representação gráfica, Pedro e Nuno apoiam-se preferencialmente na representação tabular para fazerem esta conversão. Os alunos utilizam um sistema de eixos no qual representam convenientemente os valores da variável independente e da dependente, não mostrando dificuldades na escolha da escala apropriada para os eixos e marcando de imediato os pontos da tabela. Contudo, na sua representação estes alunos não apresentam a orientação dos eixos e representam as linhas auxiliares por um traço contínuo quando deveria de ser a tracejado. Quando questionados sobre as características de um gráfico de uma função de proporcionalidade direta os alunos não sabem responder mostrando não ser capazes de estabelecer conexão entre as representações algébricas e gráficas sem passar antes pela representação tabular.

Consequentemente, os grupos da Carolina e da Laura e do Pedro e do Nuno recorrem à representação tabular, como passo intermédio e ponto de apoio na conversão de uma representação da função na sua representação gráfica, corroborando o já observado, por exemplo, em Guerreiro (2009).

7.2. Reflexão final sobre a intervenção

É agora tempo de refletir sobre o trabalho realizado, sobre os aspetos que funcionaram bem, sobre os que funcionaram menos bem e sobre as oportunidades de melhoria. Importa também falar do que esta experiência significou para mim e de como contribuiu para o meu crescimento enquanto professora.

Em primeiro lugar, considero-me afortunada por ter tido a oportunidade de trabalhar com alunos interessados, participativos e com gosto de aprender. O facto de ter sido professora destes alunos desde o início do ano letivo permitiu-me conhecê-los melhor e desenvolver com eles uma boa relação, fundamental, para o bom ambiente da sala de aula e para o sucesso desta experiência. Foi também muito gratificante observar algumas mudanças de atitude em relação à disciplina. A título de exemplo, cito a Laura, que sempre destacou a Matemática como uma das disciplinas em que sentia mais dificuldades mas que evoluiu muito ao longo do ano superando as suas expetativas.

A opção por tarefas de natureza exploratória pareceu-me bastante apropriada. O trabalho de compreensão de um conceito é um processo lento que se vai construindo pouco a pouco. É importante que esse processo se faça naturalmente e não pela simples repetição de rotinas. Note-se, todavia, que é fundamental que os alunos consolidem os seus conhecimentos e que "automatizem" certos factos e procedimentos. Só conhecendo certas práticas é que os alunos se podem concentrar nos aspetos mais difíceis e interessantes de um problema. Contudo, o pretendido é que os alunos automatizem procedimentos mas com compreensão. Penso, por isso, que para introduzir um novo conceito as tarefas de cunho exploratório são as mais apropriadas. Ao refletir sobre o meu trabalho enquanto professora, considero que deverei ter mais cuidado na introdução de novos conceitos e trabalhar mais com este tipo de tarefas.

Na realização dessas tarefas privilegiei o trabalho a pares que considero que este é o método ideal para que o este tipo de trabalho. Na construção de um novo conceito torna-se proveitoso ouvir a voz do outro e confrontar opiniões. A par disso, os alunos tendem a sentir-se menos pressionados quando podem partilhar as suas ideias e expor as suas dúvidas a um colega. Note-se ainda que a escola tem como objetivo desenvolver nos jovens competências e capacidades que os tornem aptos para ouvir e respeitar a opinião do outros e, assim, viver em sociedade com harmonia. O trabalho individual, indiscutivelmente importante, revela-se mais apropriado na consolidação de conhecimentos e para desenvolver a autonomia. Já os grupos com mais elementos, adequam-se melhor a trabalhos de maior dimensão como trabalhos de projeto. No nosso caso, a "logística" tornar-se-ia mais difícil e haveria maior propensão a que alguns elementos se esquivassem ao trabalho.

A par disso, as discussões que se produziram entre os alunos foram elementos chave na compreensão dos seus processos de raciocínio. Neste aspeto, o gravador revelou-se fundamental na análise de dados. Sem ele teria sido impossível ouvir todos os diálogos entre os alunos e assim, aceder às primeiras impressões, às hesitações, às dúvidas e às descobertas, o que teria tornado a análise de dados, por vezes, num trabalho de "adivinhação".

No entanto, nem todos os pares funcionaram sempre da melhor forma. Ao escolher os pares procurei formar grupos de alunos com afinidades mas relativamente heterogéneos do ponto de vista do sucesso na disciplina. Contudo, ao procurar afinidades penso que estimulei alguma falta de empenho em alguns pares, como por exemplo, os alunos Pedro e Nuno.

A discussão conjunta é o momento crucial onde se confrontam ideias, se expõem resoluções distintas e se faz a síntese dos resultados a reter. O facto de termos discutido em grande grupo as tarefas no dia da respetiva resolução pareceu-me particularmente proveitoso pois permitiu aproveitar as ideias ainda frescas. Porém, como o trabalho dos alunos, no início do estudo, foi mais lento que o esperado houve a necessidade de remeter a resolução de algumas tarefas para a aula seguinte.

A principal limitação com que me deparei foi a escassez de aulas que pude dedicar a este capítulo e a sua inserção temporal no fim do 3.º período. Nesta escola, são marcados, por vezes, ensaios musicais durante aulas de outras disciplinas. O professor deve reservar essas aulas para resolução de exercícios e problemas e esclarecer possíveis dúvidas pois alguns alunos estão ausentes. Consequentemente, para que esta unidade didática pudesse contemplar uma sequência de aulas sem interrupções, foi adiada sendo remetida para o final do ano letivo. Porém, só houve disponibilidade para dedicar cinco aulas e não seis como inicialmente previsto. O número de aulas revelou-se, por isso, insuficiente para que pudéssemos explorar outro tipo de situações nomeadamente, situações que nos permitissem explorar melhor a noção de variação e a leitura e interpretação de gráficos. Além disso, não houve tempo durante as aulas para que os alunos trabalhassem individualmente e conseguissem sistematizar melhor os conhecimentos adquiridos depois da exploração e discussão das tarefas.

Quanto à unidade didática, considero que a decisão de escolher o capítulo "Funções" não poderia ter sido mais acertada. Por ser um tema de que gosto particularmente e fundamental para o percurso escolar dos alunos, foi importante poder olhar para este tema não com olhos de professor mas sim de investigador e poder refletir sobre os seus processos de aprendizagem.

As tarefas propostas são também um aspeto a melhorar. Refletindo sobre elas considero que muitas vezes a função é enunciada na representação verbal, pretendendo-se de seguida a representação tabular seguida da representação algébrica e da representação gráfica. Tendo em conta que saber fazer a conversão num sentido não implica saber fazê-la no outro teria sido mais proveitoso ter havido uma maior diversidade na ordem dessas questões.

A investigação realizada foi maioritariamente de natureza qualitativa. Parece-me a forma mais correta, senão mesmo a única forma de conseguir responder a questões do tipo: “Como…” e “Porquê…”. E é a resposta a estas questões que nos dá a conhecer melhor as dificuldades e os erros dos nossos alunos e tirar ilações que nos permitam melhorar o nosso desempenho enquanto professores.

Assim, ao realizar a análise dos dados aprendi a estar mais atenta aos processos de resolução dos alunos e ao modo como mobilizam os seus conhecimentos. O papel de professora/investigadora apesar de não ser fácil é um lugar privilegiado pois somos “obrigados” a parar e a refletir sobre as nossas práticas e termos oportunidade de melhorar aspetos menos positivos.

Tendo em conta, que o objetivo de todos os professores é tornar as suas aulas num local de efetiva construção de conhecimentos, torna-se fundamental que todos os profissionais “parem” e reflitam sobre a sua prática e continuem a investir na sua formação, mantendo-se a par da divulgação de estudos deste tipo.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., (1985). *Planificação no ensino da Matemática.* Texto de apoio à disciplina de Didática da Matemática II no ano letivo de 2009/2010.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). A Matemática na educação básica. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Albuquerque, C., Antunes, C., Nápoles, S., P., Precatado, A., & Teixeira, P. (1998). *Funções.* (1ª edição). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Bárrios, A. (2011). *Funções usando o software Graph*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: *Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston: NCTM.

Costa, B., Rodrigues E. (2010). *Novo Espaço – Matemática 10ºano – Parte 1*. Porto: Porto editora.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth: Heinemann.

Domingos, A. (1994). A *Aprendizagem das funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa).

Duval, R. (2004). Registros de representación, comprensión y aprendizage: Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizages intelectuales (pp. 25-83). Cali, Colombia: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61,* 103-131.

Eisner, E. W. (1997). Cognition and representation: A way to pursue the American dream? *Phi Delta Kappan*, *78(5)*, 348-353.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Guerreiro, L. (2009). O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17,* 123-134.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-135). Mahwah: Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & NCTM.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Moretti, M., (2002). O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. *Contrapontos*, 6, 43-437.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (tradução de Magda Melo). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 105, 83-86.

Oliveira, N. (1997). *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem* (Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs* (Doctoral dissertation, University of Georgia). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*, 1-16.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, João P., Branco, N.; Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P. & Sousa, H., (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico. In Grupo de Trabalho de Investigação (GTI), *O professor e o programa de matemática do ensino básico* (pp. 11-41) (1ª ed.). Lisboa: APM – GTI

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function- a case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53,* 229-254.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Tripathi, P. N. (2008). Multiple representations: Developing mathematical understanding through. *Mathematical Teaching in the Middle School,* 13, 438-445.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experimente aiming at conceptual change. *Learning and Instrution*, 14, 485-501.

Obras consultadas

Apostol, T., (1994). Cálculo - Volume 1. Barcelona: Editora Reverté.

Campos Ferreira, J. (1995). *Introdução à análise matemática.* (6ª edição). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Anexos

Anexo I – Planos de aulas

<table>
<tr><td>Unidade Temática: Funções</td><td>Data: 16.05.2011
Aula: 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Funções
<u>Sumário</u>
Introdução ao estudo das funções: função como relação entre duas variáveis.
Resolução e discussão de uma ficha de trabalho.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conteúdos / Conceitos
• Conceito de função como relação entre duas variáveis.
• Variáveis dependente e independente.
• Diferentes formas de representação de uma função.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Compreender o conceito de função como relação entre duas variáveis.
• Identificar as variáveis dependente e independente.
• Saber converter representações de uma função noutras.
• Compreender as vantagens e as limitações das representações de uma função.
• Formular e expressar generalizações.
• Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefas
• Ficha de trabalho – Funções 1</td></tr>
</table>

Recursos
• Ficha de trabalho. • Acetatos. • Retroprojetor. • Canetas.
Forma de trabalho
• Em pares e em grande grupo.
Desenvolvimento da aula
1. (*5 minutos*) Ditar o sumário aos alunos. **2.** (*5minutos*) Distribuir a ficha de trabalho 1 aos alunos, explicando-lhes, genericamente, os seus objetivos. • A tarefa será realizada a pares, com o companheiro de carteira. • Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para executarem a tarefa 1 da ficha de trabalho 1, propondo-lhes que façam uma boa gestão do tempo. **3.** (*30 minutos*) • Os alunos devem desenvolver a sua atividade enquanto percorro os grupos, encorajando os alunos, ouvindo as suas dúvidas e remetendo-as novamente ao grupo. Caso me aperceba que um número significativo de alunos não consegue compreender uma situação ou formular estratégias de resolução, devo interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar logo uma pequena discussão coletiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho. ❖ <u>Tarefa 1</u>: **a)** A relação existente entre o perímetro e o lado do quadrado é $P = 4n$. A maioria dos alunos não deverá apresentar dificuldades nesta questão. No entanto, alguns alunos

podem demonstrar dificuldades devido ao seu caráter generalista. Nestes casos, poderei sugerir aos alunos que construam uma tabela onde figurem as medidas dos lados dos quadrados e os perímetros correspondentes e que tentem estabelecer uma relação entre estes. Não lhes deve ser recordado, nesta fase, a fórmula que já sabem sobre calcular o perímetro de um quadrado sabendo a medida do seu lado.

b) A relação existente entre a área e o lado do quadrado é $A = n^2$. A maioria dos alunos não deverá apresentar dificuldades nesta questão. No entanto, alguns alunos podem demonstrar dificuldades devido ao seu caráter generalista. Nestes casos, poderei sugerir aos alunos que construam uma tabela onde figurem as medidas dos lados dos quadrados e as áreas correspondentes e que tentem estabelecer uma relação entre estes. Não lhes deve ser recordado, nesta fase, a fórmula que já sabem sobre calcular a área de um quadrado sabendo a medida do seu lado.

c) Nesta questão os alunos poderão tentar vários tipos de resolução:

i) *Analítica:* tendo em conta que os alunos possuem expressões onde o perímetro e a área são dados em função de **n** (lado do quadrado), podem tentar igualar as duas expressões. Aqui, confrontar-se-ão com uma equação do segundo grau que não sabem resolver. Neste caso, deverei dizer-lhes que ainda não possuem nenhum algoritmo para resolver este tipo de equações, mas que poderão fazer algumas tentativas e tentar descobrir deste modo a solução.

ii) *Tabular:* os alunos podem tentar elaborar uma tabela com três colunas onde figurem o lado do quadrado, o seu perímetro e a sua área, com um número de linhas suficiente que lhes permita tirar alguma conclusão.

iii) *Gráfica:* os alunos poderão representar num referencial cartesiano os pares ordenados (n,P) e (n,A) no mínimo até n=6. No eixo das abcissas, deverão ser colocadas as medidas dos lados dos quadrados e no eixo das ordenadas, o perímetro e a área. Os pontos devem ser marcados a cores diferentes para melhor distinção. Visualmente poderão verificar que os traçados das duas funções coincidem no ponto de coordenadas (4, 16) e que até n=3 a área é menor que o perímetro mas que a partir de n=5 a área passa a ser sempre maior que o perímetro. Em ambos os casos, os alunos poderão observar que à medida que a medida do lado aumenta também aumentam as grandezas área e perímetro como seria de esperar.

d) O desafio reside no facto de tentar descobrir como são contados os fósforos interiores do quadrado **n** – $2\times(n-1)\times n$. Dar tempo aos alunos para que encontrem as suas próprias estratégias. Aos pares que estejam bloqueados sugerir-lhes que pensem só em linhas ou em colunas primeiro.

e) Esta alínea, em princípio, não suscitará dificuldades aos alunos.

4. (*45 minutos*)

- Ainda que nem todos os pares tenham concluído todas as tarefas, proceder à sua discussão em grande grupo. É importante analisar e discutir com os alunos todos os resultados obtidos, bem como todos os seus raciocínios. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver quer das outras questões.
- Na discussão da questão 1a) introduzir, informalmente, o conceito de função. Verificar que o perímetro de cada quadrado é **função** (depende) da medida do seu lado: ao variar o comprimento do lado, os correspondentes valores do perímetro também variam e existe apenas um valor de perímetro para cada medida do lado.
- Apresentar a representação tabular da função quer tenha ou não sido usada pelos alunos. Consoante a resolução da questão c) pedir também a representação gráfica desta função e explorar o conceito de função graficamente. Fazer notar aos alunos que da noção de função faz, naturalmente, parte a noção de domínio, realçando as diferenças gráficas entre uma função com a mesma expressão algébrica definida em IN ou definida em IR. Ter cuidado para não se introduzir notações que os alunos ainda não conhecem (como IR) e que poderá confundi-los na apreensão do conceito de função.
- Falar aos alunos das diferentes representações de uma função (tabular, verbal, algébrica e gráfica) e questioná-los quanto às vantagens e limitações de cada uma.
- Caso não tenha surgido nenhuma resolução gráfica da questão c), deverei fazê-la, relembrando os conceitos de abcissa, ordenada, coordenada, eixo das abcissas, eixo das ordenadas, etc. Fazer notar que em ambos os casos estão em jogo duas variáveis: a

ordem e o perímetro e a ordem e a área. Questionar os alunos acerca das dependências em questão. Falar-lhes que, convencionalmente, representamos a variável independente no eixo das abcissas e a variável dependente no eixo das ordenadas. Marcar os pares ordenados de cada uma das funções e analisar o seu crescimento.

5. (*5 minutos*)

Pedir aos alunos que concluam o resto da tarefa em casa, numa folha à parte, para entregarem na próxima aula.

Avaliação

Avaliar as aprendizagens dos alunos com o trabalho de casa da aula seguinte.

Unidade Temática: Funções	**Data**: 23.05.2011 **Aula:** 2

Tema: Funções

<u>Sumário</u>

Conclusão do sumário da aula anterior.

Conceito de função. Objeto e imagem de uma função. Domínio e contradomínio.

Formas de representar uma função.

Conteúdos / Conceitos

- Conceito de função como relação entre duas variáveis e como correspondência entre dois conjuntos.
- Variáveis dependente e independente.
- Imagem e objeto.
- Domínio e contradomínio de uma função.
- Diferentes formas de representação de uma função.

Objetivos

- Compreender o conceito de função como relação entre duas variáveis como correspondência entre dois conjuntos.
- Identificar as variáveis dependente e independente.
- Determinar a imagem de um objeto e o objeto de uma imagem quando a função é dada por uma tabela, por um gráfico e por uma expressão algébrica.
- Saber converter representações de uma função noutras.
- Compreender as vantagens e as limitações das representações de uma função.

Tarefas

- Ficha de trabalho – Funções 1

Recursos

- Ficha de trabalho.
- Acetatos.
- Retroprojetor.
- Canetas.

Forma de trabalho

- Em pares e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

1. (*5 minutos*)

Ditar o sumário aos alunos.

2. (*20 minutos*)

- Tendo em conta que as questões 1d) e 1e) da ficha de trabalho 1 não foram compreendidas pela maioria dos alunos, na aula anterior, deverei recomeçar a aula discutindo estas questões, aproveitando para retomar o conceito de função.
- Elaborar, em conjunto com turma, uma tabela que represente a função que ao número da figura faça corresponder o número total de fósforos necessários à sua construção, até n=5.

n	1	2	3	4
f	4	12	24	40

- Explicar aos alunos que o número de fósforos usados na construção de uma figura **depende** da medida do lado dessa figura. Há uma **relação de dependência** entre estas duas variáveis (lado da figura e número total de fósforos necessários à sua construção) mas é uma relação com características especiais: a cada figura corresponde um e um só total de fósforos necessários à sua construção.
- Perguntar aos alunos como pode ser expressa essa relação por meio de uma expressão algébrica:

$2\times(n-1)\times n+4n=2(n^2-n)+4n=2n^2+2n$.

- Em grande grupo, acrescentar uma linha à tabela anterior onde estejam representados os pares ordenados (n, f), sendo n – o número da figura e f – o número total de fósforos necessários à sua construção. Representar a função graficamente até n=5. Questionar os alunos se fará ou não sentido, num contexto similar ao enunciado, unir os pontos do gráfico.

3. (*45 minutos*)

- Deverei discutir o trabalho de casa (tarefa 2 da ficha de trabalho 1), tendo por objetivo reforçar a compreensão dos novos conceitos e introduzir os conceitos de objeto, imagem, domínio e contradomínio.
- Pedir a dois alunos que corrijam a questão 2 a), no quadro em simultâneo. Verificar se toda a turma concorda com aquelas representações. Independentemente de estarem corretas ou não questionar os alunos acerca do raciocínio subjacente à sua resolução, focando, essencialmente, os casos das figuras que não estavam representadas pictoricamente no enunciado. Questionar a turma: "será que as tabelas são representativas de funções?".
- Ao chegar à conclusão que se trata de uma função introduzir os conceitos de objeto e imagem, que no caso particular das sequências, coincidem com os conceitos de ordem e termo, respetivamente.
- Perguntar à turma a imagem de alguns objetos – primeiro um objeto que esteja representado na tabela e depois outro mais distante. Notar a dificuldade de resposta rápida pela observação da tabela. Questionar os alunos acerca das estratégias que utilizariam. Fazer o mesmo para o cálculo de objetos correspondentes a algumas imagens. Pedir para calcular o objeto cuja imagem é 400. Questionar os alunos acerca das estratégias que utilizariam.
- Pedir a outro aluno que responda à questão 2 b) e que explique o seu raciocínio. Perguntar à turma se chegaram a outras expressões algébricas e discutir a sua equivalência ou não.
- Mostrar num acetato a representação gráfica do número total de azulejos e do número de azulejos cinzentos. Perguntar se faz sentido unir ou não os pontos.
- Introduzir os conceitos de domínio e de contradomínio. Calculá-los nesta questão.
- Ao corrigir a questão 2d) relembrar os alunos das diferentes representações de uma função (tabular, verbal, algébrica e gráfica) e das vantagens e limitações de cada uma.
- Aflorar o conceito de proporcionalidade direta relacionando os casos: número de azulejos cinzentos e número total de azulejos. Recordar o conceito e as suas consequências tabulares. Observar o que se passa do ponto de vista gráfico.

4. (*15 minutos*)

Pedir à turma que preencha a seguinte tabela:

Quadrado de um número	1	4	9	16	25
Número	(1) ou (-1)	(2) ou (-2)	(3) ou (-3)	(4) ou (-4)	(5) ou (-5)

Perguntar se a tabela representa ou não uma função. Pedir à turma a sua representação gráfica. Analisar as diferenças gráficas de correspondências que não são funções.

5. (*5 minutos*)

Pedir aos alunos que resolvam para trabalho de casa a página 159 do manual parte 1.

Avaliação

Avaliar as aprendizagens dos alunos com o trabalho de casa da aula seguinte.

Unidade Temática: Funções	**Data**: 27.05.2011 **Aula:** 3

Tema: Funções

Sumário

Síntese dos conceitos explorados nas aulas anteriores.

Resolução e discussão de uma ficha de trabalho sobre funções de proporcionalidade direta.

Conteúdos / Conceitos

- Situações de proporcionalidade direta.
- A proporcionalidade direta como função.
- Função linear.

Objetivos

- Definir uma função de proporcionalidade direta.
- Relacionar a função linear com a função de proporcionalidade direta.
- Determinar a constante de proporcionalidade direta numa dada situação.
- Analisar o papel que a constante de proporcionalidade direta ocupa na expressão algébrica de uma função linear e a influência desta no gráfico da função.
- Representar gráfica e algebricamente situações de proporcionalidade direta.

Tarefas

- Ficha de trabalho – Funções 2

Recursos

- Ficha de trabalho.
- Acetatos.
- Retroprojetor.

Forma de trabalho

- Em pares e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

1. (*5 minutos*)

Ditar o sumário aos alunos.

2. (*30 minutos*)

- Iniciar a aula fazendo uma síntese dos conceitos explorados nas aulas anteriores: função; variável dependente, variável independente, objeto, imagem, domínio, contradomínio e conjunto de chegada. Aproveitar-se-á também para se introduzir alguma notação imprescindível no trabalho com funções.

❖ **<u>Exemplo 1:</u>**

Começar por esboçar no quadro 4 triângulos equiláteros com lados 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm.

Considerar a correspondência que ao lado de cada triângulo faz corresponder o seu perímetro.

- Perguntar aos alunos se se trata ou não de uma função e porquê.
- Escrever no quadro: Trata-se de uma função porque é uma correspondência que a cada medida do lado de um triângulo equilátero {1, 2, 3, 4} faz corresponder um único valor (o seu perímetro) {3, 6, 9,12}.
- Perguntar aos alunos quais são as variáveis dependente e independente.
- Escrever no quadro: Como o perímetro P de um triângulo equilátero depende da medida do seu lado l, diz-se que P é a variável dependente e l a variável independente.
- Perguntar aos alunos qual é o domínio e o contradomínio.
- Escrever no quadro: $D = \{1,2,3,4\}$ e $CD = \{3,6,9,12\}$.
- Pedir aos alunos que representem esta função de diferentes formas: tabular, gráfica e algébrica.

<u>Nota</u>:

➢ Na expressão algébrica, chamar à atenção para a importância de escreverem o domínio.

➢ Na representação gráfica, perguntar se os pontos devem ou não ser unidos.

- Escrever no quadro as representações:

☞ Tabular:

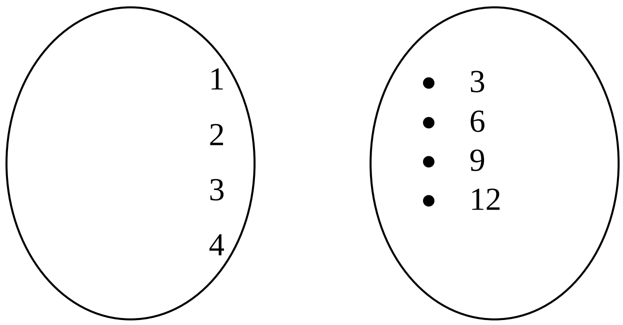
Medida do lado l	1	2	3	4
Perímetro do triângulo P	3	6	9	12

☞ Algébrica:

$P = 3l$, com $l \in \{1,2,3,4\}$

☞ Gráfica:

☞ Sagital:



- Pedir objetos correspondentes a algumas imagens e vice-versa, introduzindo alguma notação:

$P(3) = ?$ → Qual é a imagem do objeto 3?

$P(\ldots) = 12$ → Qual é o objeto que tem por imagem 12?

$P(6) = ?$ → Qual é a imagem do objeto 6? Não existe porque 6 não pertence ao domínio da função.

$P(\ldots) = 24$ → Qual é o objeto que tem por imagem 12? Não existe porque não existe nenhum objeto cuja imagem seja 24.

❖ **<u>Exemplo 2:</u>**

Análogo ao exemplo anterior mas em que as medidas dos lados dos triângulos podem apresentar todos os valores entre 0 e 4.

- Colocar as seguintes questões:

- ✓ Trata-se também de uma função?
- ✓ As variáveis dependente e independente são as mesmas?
- ✓ Qual é o domínio e o contradomínio? Note-se que ainda não podemos usar a notação de intervalo pois os alunos ainda não estão familiarizados com ela mas podemos dizer que:

Domínio = todos os números não negativos menores ou iguais a 4.

Contradomínio = todos os números maiores ou iguais a 3 e menores ou iguais a 12.

- ✓ Podemos representar esta função na forma tabular? Na forma sagital? Gráfica? E algebricamente? Se sim, como?

Fazer notar que as formas tabular e sagital só se aplicam a um número finito de elementos no domínio e contradomínio, pelo que não serão as mais adequadas.

Na forma gráfica, há que unir todos os pontos da reta $y = 3x$ com $x \in [0,4]$.

Na forma algébrica, há que escrever $P = 3l$ com l a variar entre 0 e 4 (inclusive).

- Escrever num acetato (ou quadro) as seguintes definições:

▪ Chama-se *função* a uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento do primeiro conjunto D associa um e um só elemento do segundo conjunto *C*, isto é, a cada valor da variável independente corresponde um e um só valor da variável dependente. Se a função se chamar f, pode escrever-se $f : D \to C$ e pode ler-se que f é uma função de *D* em *C*.

<u>Explicar aos alunos a diferença entre conjunto de chegada e contradomínio usando o seguinte exemplo</u>: Quando se analisa se uma sala tem um número suficiente de lugares para uma audiência previsível, o que se faz é dar alguma margem, isto é, em princípio reserva-se uma sala em que sobrem algumas cadeiras. Neste caso o domínio é constituído pelas pessoas que estão na sala, o conjunto imagem ou contradomínio pelas cadeiras ocupadas e o conjunto de chegada por todas as cadeiras da sala. Suponhamos que na sala não cabem mais cadeiras. Pode acontecer que os lugares fiquem todos preenchidos (e nesse caso o contradomínio coincide com o conjunto de chegada), que sobrem algumas cadeiras vazias (e nesse caso o contradomínio está contido no conjunto de chegada). Se faltarem lugares, e sendo a correspondência uma pessoa um lugar, terão que ser retirados elementos ao domínio.

▪ Designa-se por *objeto* um elemento do conjunto D.

▪ Designa-se por *imagem* um elemento do conjunto C que corresponde a um determinado elemento do conjunto D.

▪ Ao conjunto de todos os objetos, dá-se o nome de *domínio* da função f e representa-se por *D*.

▪ O conjunto de chegada, C, é o conjunto para o qual é feita a correspondência, ou seja, é um conjunto que contém todas as imagens.

▪ Ao conjunto de todas as imagens dá-se o nome de *contradomínio* e representa-se por *CD* ou *D'*. Este conjunto é um subconjunto do conjunto de chegada.

Notação:

É frequente, a variável independente ser representada por x, e a variável dependente por y. Se a função se chamar f, pode escrever-se $y = f(x)$.

3. (*3 minutos*)

Distribuir a ficha de trabalho aos alunos, explicando-lhes, genericamente, os seus objetivos.

- A tarefa será realizada a pares, com o companheiro de carteira.
- Informar os alunos que dispõem de 20 minutos para executarem a tarefa 1 (e 2 caso tenham tempo) da ficha de trabalho, propondo-lhes que façam uma boa gestão do tempo.

4. (*20 minutos*)

- Os alunos devem desenvolver a sua atividade enquanto percorro os grupos, encorajando os alunos, ouvindo as suas dúvidas e remetendo-as novamente ao grupo. Caso me aperceba que um número significativo de alunos não consegue compreender uma situação ou formular estratégias de resolução, devo interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar logo uma pequena discussão coletiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

5. (*25 minutos*)

- Ainda que nem todos os pares tenham concluído todas as tarefas, proceder à sua discussão em grande grupo. É importante analisar e discutir com os alunos todos os resultados obtidos, bem como todos os seus raciocínios. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver, quer das outras questões.

- Em relação às alíneas a) ler, se possível, uma resposta incompleta, e de seguida, uma mais completa sobre como justificar que uma correspondência é função.
- Alguns alunos não terão dificuldade em detetar casos de proporcionalidade direta quando as funções estão representadas por meio de tabelas, pois já trabalharam estas situações no ano anterior. No entanto, alguns alunos poderão apresentar lacunas neste aspeto. Pedir, a um aluno, que explique o que é a proporcionalidade direta (realçar que não basta dizer "se uma grandeza aumenta a outra também aumenta" **aumenta na mesma proporção**). Explicar que se o quociente $\frac{y}{x}$ entre quaisquer dois valores correspondentes é constante (para $x \neq 0$ e $y \neq 0$) então y é diretamente proporcional a x.
- Depois de esboçados os 3 gráficos, observar que:

  - Situação 1: os pontos estão todos alinhados e sobre uma "reta" que passa na origem.

  - Situação 2: os pontos não estão todos alinhados.

  - Tarefa 2: os pontos estão todos alinhados mas não estão sobre uma "reta" que passa na origem.

Como apenas a situação 1 é um caso de proporcionalidade direta, podemos conjeturar que nos gráficos que representem funções de proporcionalidade direta os pontos têm de estar alinhados e sobre uma "reta" que passa na origem. Observar que para determinar graficamente a constante de proporcionalidade direta, basta escolher um ponto do gráfico e calcular a razão entre a ordenada e a abcissa desse ponto.

- Depois de escritas as três expressões algébricas, podemos observar que a na situação que se trata de um caso de proporcionalidade direta, a função é do tipo $y = kx, k \neq 0$ e k é a constante de proporcionalidade direta.

6. (*2 minutos*)

Pedir aos alunos que resolvam para trabalho de casa as páginas 163, 164 e 165 do manual parte 1, para sexta.
Avaliação Avaliar as aprendizagens dos alunos com o trabalho de casa da aula seguinte.

Unidade Temática: Funções	**Data**: 30.05.2011 **Aula:** 4

Tema: Funções

<u>Sumário</u>

Conclusão do sumário da aula anterior.

Exemplos de situações que representam funções de proporcionalidade direta.

Correção do trabalho de casa.

Conteúdos / Conceitos

- Situações de proporcionalidade direta.
- A proporcionalidade direta como função.
- Função linear.

Objetivos

- Definir uma função de proporcionalidade direta.
- Relacionar a função linear com a função de proporcionalidade direta.
- Determinar a constante de proporcionalidade direta numa dada situação.
- Analisar o papel que a constante de proporcionalidade direta ocupa na expressão algébrica de uma função linear e a influência desta no gráfico da função.
- Representar gráfica e algebricamente situações de proporcionalidade direta.

Tarefas

Ficha de trabalho – Funções 2

- Manual – tarefas (1 a 6) da página 159, tarefa 26 (página 165) e tarefa 41 (página 172).

Recursos

- Ficha de trabalho;
- Ficheiro com representações gráficas no Excel;
- Manual;
- DataShow;
- Computador.

Forma de trabalho

- Em pares e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

1. (*5 minutos*)

Ditar o sumário aos alunos.

2. (*20 minutos*)

☞ Iniciar a aula retomando a discussão da situação 1 da ficha de trabalho 2 (aula anterior).

- Analisar a tabela da situação 1. Na situação 1, o quociente $\frac{P}{l}$ é sempre constante e igual a 4. 4 é a constante de proporcionalidade direta e representa o perímetro de um quadrado de lado 4. Colocar a questão: basta que os números da 2ª linha da tabela tenham saltos constantes para que se trate de proporcionalidade direta? Se os alunos responderem que sim, apresentar-lhes um contraexemplo (uma tabela que represente a função $y = 4x + 1$) e pedir-lhes para observar o que se passa (do ponto de vista tabular, algébrico e gráfico).
- Analisar o gráfico da situação 1 e tirar conclusões: os pontos estão todos alinhados sobre uma "reta" que passa na origem. Observar que para determinar graficamente a constante de proporcionalidade direta, basta escolher um ponto do gráfico e calcular a razão entre a ordenada e a abcissa desse ponto.
- Analisar a expressão algébrica escrita pelos alunos: $P = 4l$ e indagar se o 4 é uma coincidência. Questioná-los sobre que a maneira como verificaram que uma representação tabular representa uma situação de proporcionalidade direta. Deduzir que da expressão $\frac{P}{l} = 4$ sai a expressão $P = 4l$. Concluir que todas as funções que representem casos de proporcionalidade direta têm uma expressão algébrica do tipo $y = kx, k \neq 0$, onde k é a constante de proporcionalidade direta.
- Esclarecer os diversos tipos de notação que são usados nas funções. Esclarecer que é comum usar-se as letras $f, g, h \ldots$ (minúsculas) para designar funções. Para variável independente, usamos a letra x e para variável independente y ou $f(x)$. Analisar as

notações usadas no manual.

- Explorar um pouco mais a situação 1 (uma aluna na aula passada encontrou como constante de proporcionalidade direta $\frac{1}{4}$): considerar, agora, uma função que a cada perímetro faz corresponder o valor do lado do quadrado (de domínio $\Re^+$), representar alguns valores inteiros na forma tabular e verificar que também se trata de uma função de proporcionalidade direta cuja constante de proporcionalidade é $\frac{1}{4}$ e que representa o lado de um quadrado cujo perímetro é 1. Retirar conclusão: dadas duas grandezas x e y, se y é diretamente proporcional a x e k é a constante de proporcionalidade, também x é diretamente proporcional a y e a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{k}$.
- Ditar:

▪ Dadas duas grandezas, x e y, diz-se que se y *é diretamente proporcional a* x, se o quociente $\frac{y}{x} = k$ (para $x, y \neq 0$) entre dois quaisquer valores correspondentes é constante. Esse número, k, é a constante de proporcionalidade e representa o valor de y quando $x = 1$, quando 1 pertence ao domínio. Além disso, quando $x = 0$ então $y = 0$.

▪ Toda a função de proporcionalidade direta é representada por uma expressão algébrica do tipo $y = kx, k \neq 0,$ em que k é a constante de proporcionalidade. Funções do tipo $y = kx, k \neq 0,$ chamam-se *funções lineares*.

▪ Nos gráficos que representam funções de proporcionalidade direta, os pontos têm de estar alinhados sobre uma "reta" que passa na origem.

▪ Dadas duas grandezas x e y, se y é diretamente proporcional a x e k é a constante de proporcionalidade, também x *é diretamente proporcional a* y e a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{k}$.

3. (*15 minutos*)

☞ Discutir da situação 2 da ficha de trabalho 2

- Analisar a tabela da situação 2. Verificar que não se trata de uma situação de proporcionalidade direta pois não existe invariância do quociente $\frac{A}{l}$.

- Analisar o gráfico da situação 2 e tirar conclusões: os pontos não estão todos alinhados.
- Analisar a expressão algébrica escrita pelos alunos: $A = l^2$.
- Concluir que o perímetro de um quadrado é proporcional ao seu lado mas a área não.

☞ Discutir a tarefa 2 da ficha de trabalho 2

- Analisar a tabela. Verificar que não se trata de uma situação de proporcionalidade direta pois não existe invariância do quociente $\frac{y}{x}$.
- Analisar o gráfico da tarefa 2 e tirar conclusões: os pontos estão todos alinhados mas não estão sobre uma "reta" que passa na origem.
- Analisar a expressão algébrica escrita pelos alunos: $y = 2{,}5 + 0{,}5x$ com $x \geq 0$.

4. (*2 minutos*)

- Informar os alunos que dispõem de 10 minutos para executarem a tarefa 26 da página 165 do manual (e para os alunos mais rápidos a tarefa 41 da página 172), propondo-lhes que façam uma boa gestão do tempo.

5. (*10 minutos*)

- Os alunos devem desenvolver a sua atividade enquanto percorro os grupos, encorajando os alunos, ouvindo as suas dúvidas e remetendo-as novamente ao grupo. Caso me aperceba que um número significativo de alunos não consegue compreender uma situação ou formular estratégias de resolução, devo interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar logo uma pequena discussão coletiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

6. (*10 minutos*)

- Ainda que nem todos os pares tenham concluído todas as tarefas, proceder à sua discussão em grande grupo. É importante analisar e discutir com os alunos todos os resultados obtidos, bem como todos os seus raciocínios. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver, quer das outras questões.

- Corrigir a tarefa 26 da página 165. Discutir qual a influência de k no gráfico das funções lineares do tipo $y = kx, k \neq 0$. Mostrar o ficheiro em Excel que mostra o gráfico de funções desse tipo para diferentes valores de k ($k > 0$).

7. (*15 minutos)*

- Esclarecer dúvidas sobre o trabalho de casa – página 159 (manual)

8. (*5 minutos)*

- Pedir aos alunos para que resolvam numa folha à parte a tarefa 41 da página 172. Esta tarefa serve para consolidação/sistematização de conceitos e como um exemplo de uma situação de proporcionalidade direta ligada à Física. Mostrar o ficheiro em Excel que ilustra esta situação.

Avaliação

Avaliar as aprendizagens dos alunos com o trabalho de casa da aula seguinte.

Unidade Temática: Funções	**Data**: 3.06.2011 **Aula:** 5

Tema: Funções

<u>Sumário</u>

Resolução e discussão de uma ficha de trabalho.

Leitura, interpretação e comparação de gráficos em contexto real.

Conteúdos / Conceitos

- Leitura e interpretação de gráficos em contexto real.
- Estudo da variação de uma função.
- Comparação de gráficos em contexto real.

Objetivos

- Analisar e comparar gráficos que traduzam situações da vida real.
- Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico.
- Modelar situações usando funções lineares.
- Incentivar à comunicação Matemática.
- Desenvolver o espírito de cooperação, permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem saberes e responsabilidades dentro de pequenos grupos e turma.

Tarefas

Ficha de trabalho – Funções 3

Recursos

- Ficha de trabalho.
- Retroprojetor.
- Acetatos impressos com referenciais e com o gráfico da ficha de trabalho 3.
- Canetas de acetato.
- Manual.

Forma de trabalho

- Em pares e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

1. Antes de iniciar a aula, escrever o sumário no quadro e distribuir as fichas pelos lugares.

2. *(5 minutos)*

Enquanto os alunos escrevem o sumário, recolher o trabalho de casa e as fichas da aula anterior.

3. *(2 minutos)*

Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para executarem a tarefa 1 da Ficha de trabalho 3, propondo-lhes que façam uma boa gestão do tempo.

4. *(15 minutos)*

Os alunos devem desenvolver a sua atividade enquanto percorro os grupos, encorajando os alunos, ouvindo as suas dúvidas e remetendo-as novamente ao grupo. Caso me aperceba que um número significativo de alunos não consegue compreender uma situação ou formular estratégias de resolução, devo interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar logo uma pequena discussão coletiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

- A alínea a) da tarefa 1 tem como intuito estabelecer uma ponte entre a aula anterior onde se trabalharam situações de proporcionalidade direta. Espera-se que os alunos reconheçam com facilidade o gráfico A como representativo de uma função de proporcionalidade direta. Caso algum aluno manifeste dificuldades, questioná-lo sobre o que se passa quando estamos perante um caso de proporcionalidade direta. Sugerir-lhe que construa uma tabela com os dados do gráfico e perguntar-lhe o que constata.

☞ Na discussão, caso não surja em nenhuma resolução, perguntar aos alunos se poderiam só por observação do gráfico identificar a situação de proporcionalidade direta. Posso aproveitar para perguntar à turma qual a constante de proporcionalidade e como a calcularam. Relembrar que pode ser identificada, quase de imediato, pela imagem do objeto 1. Ou fazendo, qualquer outro quociente $\frac{y}{x}$, tal como faziam anteriormente com as tabelas. Indagar sobre o que representa a constante de proporcionalidade naquele caso. Na explicitação da expressão algébrica, é possível que os alunos manifestem mais dificuldades. Recordar-lhes que numa situação de proporcionalidade direta os quocientes $\frac{y}{x}$ correspondentes são sempre iguais. Neste caso, $\frac{y}{x} = 3$, onde 3 é a constante de proporcionalidade direta. Inquirir sobre a possibilidade de escrever outra expressão algébrica equivalente à obtida. É possível, que alguns alunos perguntem se não podem usar, de imediato, a expressão genérica $y = kx$, onde k é a constante de proporcionalidade direta. Responder-lhes que podem usá-la mas que têm de percebê-la. Caso ninguém se lembre da expressão geral das funções lineares, deverei relembrar, rapidamente, este tópico.

- Na questão 1b) é necessário, em primeiro lugar, que o alune interprete bem o que lhe é pedido. Depois, pode recorrer, a diferentes tipos de raciocínio:

i) Substituir na expressão obtida na alínea 1a) x por 6.

ii) Pensar sobre o que representa a constante de proporcionalidade naquele contexto: a quantia ganha numa hora. Caso o número de horas seja o sêxtuplo, a quantia também será o sêxtuplo.

iii) Representar a função graficamente, noutro referencial, que permita a visualização do ponto de abcissa 6 e da sua correspondente imagem.

iv) Representar (ou continuar a representação) da função em forma de tabela, até ao valor $x = 6$, fazendo uso da constante de proporcionalidade ou de propriedades das funções de proporcionalidade direta (por exemplo, “saltos” constantes)

☞ Caso os alunos manifestam dificuldades na resolução desta questão, encaminhá-los para o tipo de resolução que tenha mais continuidade com o que fizeram em 1a).

☞ Na discussão, devem ser referidos todos os processos diferentes de resolução dos alunos e acrescentar algum importante que não tenha sido referido.

- Em caso de dificuldades na questão 1c), pedir ao aluno que faça primeiro a segunda parte da questão, isto é, que calcule quanto é que se ganha nas situações A e B trabalhando 3 horas.
- Em caso de dúvidas na alínea 1d), sugerir aos alunos que elaborem uma tabela com os valores pedido e que só depois partam para a representação gráfica.

☞ Pedir a um aluno que faça a representação gráfica num acetato para mostrar durante a discussão da tarefa.

- É natural que alguns alunos enfrentem dificuldades na resolução da alínea 1e). Pedir-lhes que escrevam explicitamente os cálculos realizados para resolver a alínea anterior, ou seja, como calculamos quanto se ganha numa hora, em duas horas,…. e em x horas?

☞ Na discussão, perguntar se se trata de um caso de proporcionalidade direta. Porque não? Justificar usando diversos argumentos - a definição de proporcionalidade direta – vista graficamente, algebricamente ou em forma de tabela.

5. *(20 minutos)*

Ainda que nem todos os pares tenham concluído todas as tarefas, proceder à sua discussão em grande grupo. É importante analisar e discutir com os alunos todos os resultados obtidos, bem como todos os seus raciocínios. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver, quer das outras questões. Recolher um exemplar da resolução do grupo.

6. *(7 minutos)*

Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para executarem a tarefa 2 da Ficha de trabalho 3, explicando-lhes, sucintamente, os seus objetivos e propondo-lhes que façam uma boa gestão do tempo. Pretende-se que os alunos interpretem cada um dos gráficos apresentados, estabeleçam relações entre eles e elaborem uma história que estes gráficos possam representar. É natural, que os alunos tenham dificuldades em iniciar a tarefa pois, além da dificuldade que terão em interpretar os gráficos, preocupar-se-ão, possivelmente, com a questão de escrita, como não repetir palavras ou em ser muito criativos. Pedir-lhes que escrevam uma história simples e para ser mais rápido que escrevam frases curtas e simples, para otimizar o tempo. Para evitar que os alunos se percam, a professora deve indicar no quadro, alguns aspetos que gostaria de ver referidos na história tais como:

i) Tempos e locais de partida e de chegada.

ii) Distâncias totais percorridas.

iii) Períodos em que a distância a casa é constante, cresce e decresce.

iv) Velocidades.

7. *(15 minutos)*

Os alunos devem desenvolver a sua atividade enquanto percorro os grupos, encorajando os alunos, ouvindo as suas dúvidas e remetendo-as novamente ao grupo. Caso me aperceba que um número significativo de alunos não consegue compreender uma situação ou formular estratégias de resolução, devo interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar logo uma pequena discussão coletiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

8. *(25 minutos)*

Ainda que nem todos os pares tenham concluído todas as tarefas, proceder à sua discussão em grande grupo. É importante analisar e discutir com os alunos todos os resultados obtidos, bem como todos os seus raciocínios. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver, quer das outras questões. Recolher um exemplar da resolução do grupo.

Na medida do possível, devo ir observando as histórias construídas pelos grupos e ter noção das histórias que estão mais e menos completas, e/ou com erros que devem ser referidos (por se tratarem de erros comuns) e/ou com detalhes interessantes a serem partilhados. É preciso fazer notar aos alunos que não é possível ler as histórias de todos, mas que podem todos contribuir com informações ainda não referidas. Deve tentar começar-se pelas histórias com menos informação e ir enriquecendo a discussão com a contribuição de todos. Devo tomar nota no quadro, em tópicos, as informações mais relevantes.

Saída de casa: 14h (pois a distância a casa é zero)

Distância máxima a que esteve de casa: 6 km

Distância a casa: Cresce das 14h às 16h, mantém-se constante das 16h às 17h e diminui das 17h às 20h.

Distância total percorrida: 12 km (sai de casa e distancia-se 6 km e depois regressa a casa)

Volta a casa: 20h (pois a distância a casa é zero)

Duração do passeio: 6 horas (das 14h até às 20h)

Como decorreu o passeio: percorreu 6 km durante 2 h, afastando-se de casa, a uma velocidade constante (porque há proporcionalidade direta entre a distância e o tempo) $v = \frac{d}{t} = \frac{6}{2} = 3\,km/h$. Parou durante uma hora - entre as 16h e as 17h - (porque a distância a casa permanece constante durante esse tempo). Depois regressa a casa, mais lentamente (o segmento de reta é menos inclinado), percorrendo 6 km em 3 horas, isto é, a uma velocidade constante de $v = \frac{d}{t} = 2 = 2\,km/h$.

9. *(1 minutos)*

Pedir aos alunos que resolvam a ficha de revisões para a próxima aula de esclarecimento de dúvidas.

Avaliação

Avaliar as aprendizagens dos alunos através da observação e da análise das suas resoluções (com auxílio das gravações) durante e após o desenrolar da atividades.

Anexo II – Fichas de trabalho

ACADEMIA DE MÚSICA DE SANTA CECÍLIA

MATEMÁTICA – 7.º ANO

2010/2011

Funções – Ficha de trabalho 1

1. Na sequência que se segue cada figura é formada por pequenos quadrados construídos usando fósforos. Admite que este padrão se mantém. Considera cada quadrado pequeno como uma unidade de área e cada fósforo como uma unidade de comprimento.

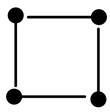


Figura 1

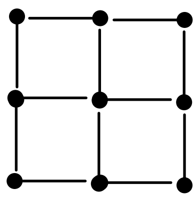


Figura 2

…

a) Que relação existe entre o perímetro da figura e o respetivo lado? Descreve essa relação em linguagem corrente e em linguagem simbólica.

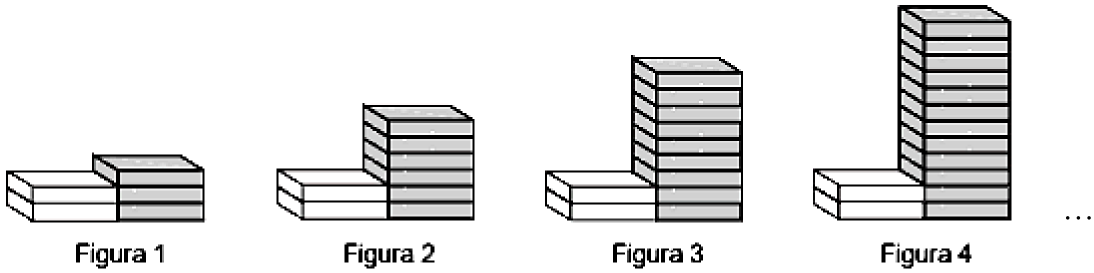
b) Que relação existe entre a área de cada figura e o respetivo lado? Descreve essa relação em linguagem corrente e em linguagem simbólica.

c) Existe alguma figura cujo valor do perímetro coincida com o valor da área? Se existir tal figura, o que podemos dizer sobre o valor destas duas grandezas (perímetro e área) em figuras anteriores e posteriores a esta? Explica o teu raciocínio.

d) Que relação existe entre o número da figura e o número de fósforos necessários à construção da mesma? Descreve essa relação em linguagem corrente e em linguagem simbólica.

e) Representa a informação obtida em **d)** num referencial cartesiano.

2. Observa a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, segundo uma determinada regra. Admite que esta regra se mantém.



a) Elabora duas tabelas onde relaciones:

i) o número da figura n com o número de azulejos cinzentos de cada figura;

ii) o número da figura n com o número total de azulejos de cada figura.

b) Escreve uma expressão algébrica que represente:

i) número de azulejos cinzentos de cada figura;

ii) o número total de azulejos de cada figura.

c) Representa graficamente, no mesmo referencial cartesiano, o número total de azulejos e o número de azulejos cinzentos.

d) Compara as diferentes representações das alíneas a), b) e c) e regista as conclusões a que chegaste.

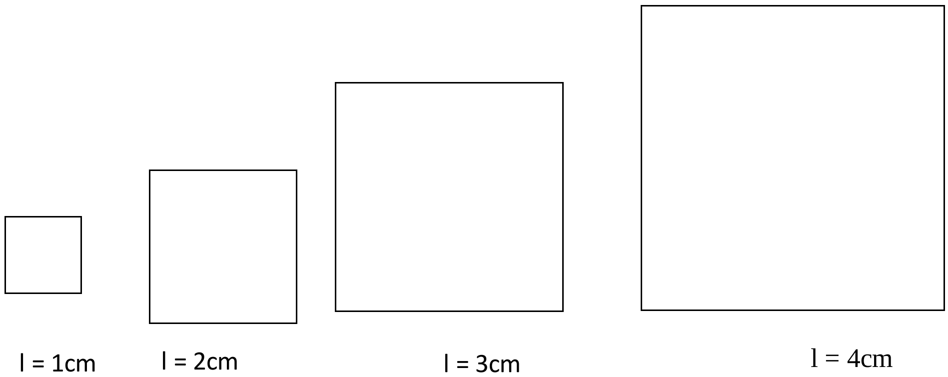
ACADEMIA DE MÚSICA DE SANTA CECÍLIA

MATEMÁTICA – 7.º ANO

2010/2011

Funções – Ficha de trabalho 2

1. Observa a seguinte sequência de quadrados. Admite que este padrão se mantém.



Situação 1: Considera a correspondência que à medida do lado de cada quadrado faz corresponder o seu perímetro.

a) A correspondência descrita anteriormente representa uma função? Justifica a tua resposta.

b) Completa a seguinte tabela:

Medida do lado (l)	1	2	3	4
Perímetro do quadrado (P)				

c) A tabela preenchida em b) traduz uma situação de proporcionalidade direta? Em caso afirmativo, indica a constante de proporcionalidade e o que representa neste contexto.

d) Encontra uma expressão algébrica que represente esta correspondência.

e) Representa esta correspondência graficamente.

Situação 2: Considera agora a correspondência que à medida do lado de cada quadrado faz corresponder a sua área.

a) A correspondência descrita anteriormente representa uma função? Justifica a tua resposta.

b) Completa a seguinte tabela:

Medida do lado (l)	1	2	3	4
Área do quadrado (A)				

c) A tabela preenchida em b) traduz uma situação de proporcionalidade direta? Em caso afirmativo, indica a constante de proporcionalidade e o que representa neste contexto.

d) Representa esta correspondência graficamente.

e) Encontra uma expressão algébrica que represente esta correspondência.

2. Uma empresa de táxis cobra 2,5 € de taxa inicial, acrescida de 0,5 € por quilómetro.

a) Constrói uma tabela que represente uma função de domínio {1, 2, 3, 4, 5, 10, 15} onde se relacione a distância percorrida (em quilómetros) com preço a pagar (em euros).

b) Verifica se se trata de um caso de proporcionalidade direta. Se sim, indica a constante de proporcionalidade e o que ela representa.

c) Representa a função graficamente.

d) Encontra uma expressão algébrica que represente esta função.

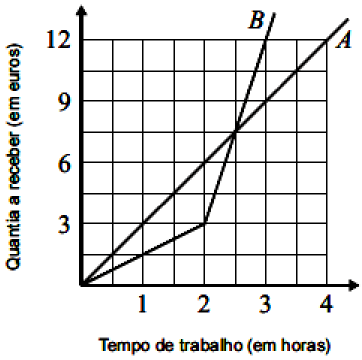
ACADEMIA DE MÚSICA DE SANTA CECÍLIA

MATEMÁTICA – 7.º ANO

2010/2011

Funções – Ficha de trabalho 3

1. O Carlos e o irmão, o Daniel, vão trabalhar num arraial, em bancas diferentes. Por esta tarefa receberão uma certa quantia, que depende somente do tempo de trabalho. Na figura ao lado, estão representadas graficamente duas funções que relacionam o tempo de trabalho, em horas, do Carlos e do Daniel com a quantia a receber por cada um deles, em euros. Um dos irmãos vai receber de acordo com a função representada no gráfico A e o outro irmão vai receber de acordo com a representada no gráfico B.

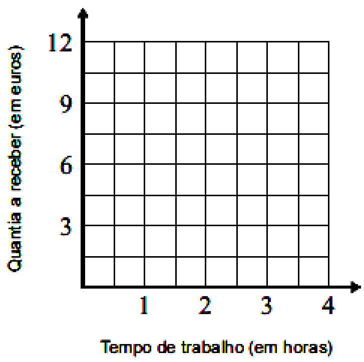


a) Alguma das situações representadas graficamente traduz um caso de proporcionalidade direta? Em caso afirmativo, identifica qual e indica a expressão algébrica correspondente.

b) Considera o irmão que vai receber de acordo com a função representada no gráfico A. Que quantia receberá, se trabalhar seis horas?

c) Se os dois irmãos trabalharem três horas, o Carlos receberá mais do que o Daniel. Qual dos gráficos (A ou B) representa a relação entre o tempo de trabalho do Carlos e a quantia que ele receberá por esse trabalho?

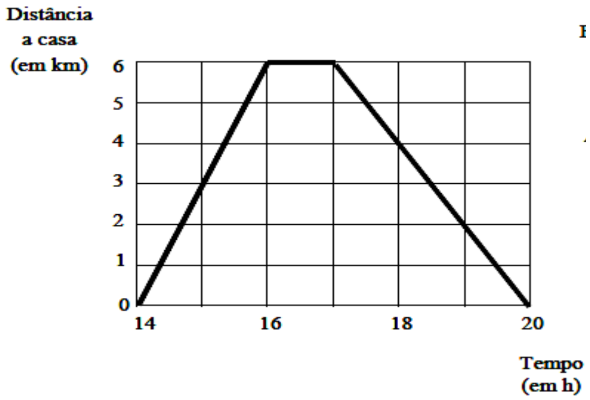
d) A Laura também vai trabalhar no arraial. Como mora longe, receberá 1,5 euros para o bilhete de autocarro, de ida e volta, e 3 euros por cada hora de trabalho. Constrói, no referencial do lado, o gráfico que estabelece a quantia a receber pela Laura, em função do tempo de trabalho, para



valores do tempo de trabalho compreendidos entre 1 hora e 4 horas (inclusive).

e) Escreve a expressão algébrica correspondente à função descrita na alínea **d)**.

2. Observa o gráfico que se segue e, com base na informação que este contém, escreve uma pequena história sobre o passeio da professora Pelicano.



(adaptada de Ponte, Branco e Matos (2009))

Anexo III – Entrevista

ACADEMIA DE MÚSICA DE SANTA CECÍLIA

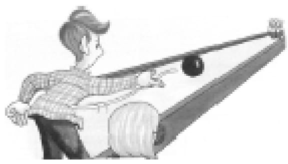
MATEMÁTICA – 7.º ANO

2010/2011

ENTREVISTA

No Domingo, a professora Pelicano e a professora Faísca decidiram ir jogar bowling. Na receção foram informadas que teriam de pagar 3,75 euros por cada jogo realizado.

Resolveram então fazer uma tabela que relacionasse o preço a pagar com o número de jogos realizados.



a) Completa a tabela seguinte:

N.º de jogos	1	2		4		
Preço (euros)			37,50		18,75	11,25

b) A correspondência estabelecida entre o número de jogos e o preço (em euros) é uma função? Justifica a tua resposta.

c) Quais são as variáveis dependente e independente?

d) O preço a pagar é diretamente proporcional ao número de jogos a efetuar? Se sim, explica porquê, indica qual é a constante de proporcionalidade e qual o seu significado neste contexto.

e) Se x representar o número de jogos realizados e y representar o preço em euros, indica uma expressão algébrica que traduza a relação entre x e y.

f) Representa graficamente a situação. Podes confirmar graficamente que se trata de uma relação de proporcionalidade direta? Explica porquê.

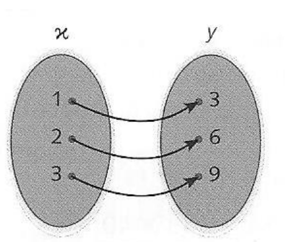
Anexo IV – Questões do teste sumativo

Parte 1

Nas sete questões que se seguem assinale a única resposta correcta. Não apresente cálculos.

1. Qual (ou quais) das seguintes correspondências não representa(m) uma função?

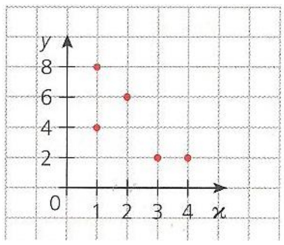
(A)



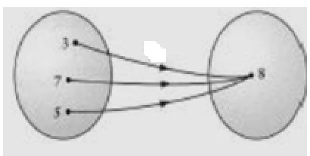
(B)

x	5	10	15
y	3	8	13

(C)



(D)



Parte 2

Leia as perguntas que se seguem com atenção e apresente todos os cálculos que efectuar e as justificações que considere necessárias.

2. A seguinte tabela mostra a correspondência entre a idade e o peso de um menino nos seis primeiros anos de vida:

Idade (anos)	0	1	2	3	4	5	6
Peso (Kg)	3,25	9,60	13,10	15,50	16,27	18,46	21,10

2.1. A correspondência apresentada na tabela é uma função? Justifique.

2.2. Identifique o domínio e o contradomínio.

2.3. Chamemos *f* a esta correspondência. Complete:

2.3.1. $f\,(1) =$......

2.3.2. $f\,(\ldots\ldots) = 15{,}50$

3. O Timóteo viajou de Portugal para a Timotelândia, onde a moeda é o timotino. Antes de viajar foi ao banco trocar euros por timotinos.

3.1. Sabendo que naquele dia cada timotino lhe custou 2 euros, complete a tabela.

N.º de timotinos	0	5		15	
Custo (em euros)			20		40

3.2. Qual a variável independente? E qual a dependente?

3.3. Designando por x o número de timotinos e por y o seu custo (em euros), complete a expressão: $y = \_\, x$.

3.4. As grandezas número de timotinos e custo são diretamente proporcionais? Justifique a sua resposta.

3.5. Qual é a constante de proporcionalidade? O que representa no contexto do problema?

Anexo V – Autorizações

Pedido de autorização – Encarregados de educação

Ex^{mo}. Sr. Encarregado de Educação

Venho informar que, no âmbito de um trabalho de investigação, orientado pelas professoras Hélia Oliveira (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa) e Suzana Nápoles (Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa), estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática lectiva. Este estudo integra-se no curso de Mestrado em Ensino, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e decorrerá entre Fevereiro e Maio de 2011.

Para a realização deste trabalho necessito de obter gravações em vídeo e em áudio de algumas das aulas por mim leccionadas, assim como gravações de entrevistas que serão feitas a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade do seu educando, dado que em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes e nunca será utilizada a imagem de qualquer dos alunos. A Direcção da Escola foi informada deste trabalho e dos procedimentos necessários relativos às gravações em sala de aula.

Para o efeito, solicito a sua autorização para proceder às gravações e às entrevistas referidas, manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradecendo desde já a sua atenção, apresento os meus melhores cumprimentos.

Annabela Afonso Pelicano

Lisboa, 3 de Fevereiro de 2011

Autorização

Eu, ____, encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) ____, n.º ____, da turma _, do 7.º ano de escolaridade, tomei conhecimento deste trabalho e:

- autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) a realização da entrevista gravada com o meu educando (a);
- autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) a gravação áudio do meu educando (a) em sala de aula;
- autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) a gravação vídeo do meu educando (a) em sala de aula.

________________, _____ de ____________ de 2011

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

Pedido de autorização – Direção da escola

Ex^{ma}. Sra.

Directora da Academia de Música de Santa Cecília

Eu, Annabela Afonso Pelicano, informo que no âmbito de um trabalho de investigação, orientado pelas professoras Hélia Oliveira (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa) e Suzana Nápoles (Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa), estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática lectiva, intitulado "O estudo das funções no 7.º ano: conceito e representações". Este estudo integra-se no curso de Mestrado em Ensino, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e decorrerá entre Fevereiro e Maio de 2011.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações em vídeo e em áudio de algumas das aulas, assim como gravações áudio de entrevistas que serão feitas a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade dos alunos. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes e nunca será utilizada a imagem de qualquer dos alunos.

Os Encarregados de Educação serão informados, por escrito, destes procedimentos no sentido de poderem autorizar o trabalho com os seus educandos. Assim, aguardo permissão para solicitar a autorização dos Encarregados de Educação para proceder às referidas gravações. Tenho inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento, que se considere necessário.

Com os meus respeitosos cumprimentos

____

Annabela Afonso Pelicano

Lisboa, 7 de Fevereiro de 2011